

שאלה 1

נתונים שני כדים. בכד הראשון יש 4 כדורים כחולים ו-2 כדורים ירוקים. בכד השני יש 2 כדורים כחולים ו-2 כדורים ירוקים. בוחרים באקראי בסכוי שווה באחד הכדים, ומוציאים ממנו עם החזרה 3 כדורים.

- א. מהי ההסתברות ששני הכדורים הראשונים יהיו כחולים ?
ב. מהי ההסתברות שבחרנו בכד הראשון בהינתן ששני הכדורים הראשונים היו כחולים ?
ג. מהי ההסתברות ששלושת הכדורים המוצאים יהיו מאותו צבע ?

פתרון

א. $0.5 \cdot \frac{4}{4+2} \cdot \frac{4}{4+2} + 0.5 \cdot \frac{2}{2+2} \cdot \frac{2}{2+2}$

ב. A - בחרנו בכד הראשון, B - שני הכדורים הראשונים היו כחולים

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot \frac{4}{4+2} \cdot \frac{4}{4+2}}{0.5 \cdot \frac{4}{4+2} \cdot \frac{4}{4+2} + 0.5 \cdot \frac{2}{2+2} \cdot \frac{2}{2+2}}$$

ג. $0.5 \cdot \left[\left(\frac{4}{4+2} \right)^3 + \left(\frac{2}{4+2} \right)^3 \right] + 0.5 \cdot \left[\left(\frac{2}{2+2} \right)^3 + \left(\frac{2}{2+2} \right)^3 \right]$

שאלה 2

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של קוביה תקינה.

- א. מהי ההסתברות שנקבל הטלה עם תוצאה זוגית לפני שנקבל לראשונה הטלה עם תוצאה שהיא כפולה שלמה של 3 ?
ב. מהי ההסתברות שנקבל בדיוק פעמיים תוצאה של 5 לפני שנקבל לראשונה תוצאה של 4 ?

פתרון

- א. צריך שבפעם הראשונה שתתקבל תוצאה של 2 או 3 או 4 או 6, זאת תהיה תוצאה של 2 או 4. הסיכוי לכך הוא $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
נראה זאת גם בדרך נוספת.
יהי a - ההסתברות המבוקשת.
אם בהטלה הראשונה נקבל 2 או 4 אז המאורע יתרחש. אם בהטלה הראשונה נקבל 3 או 6 אז בודאות המאורע לא יתרחש. אם בהטלה הראשונה נקבל 1 או 5 אז הכל תלוי בהמשך וחוזרים לסיכוי המקורי. לכן מתקיים $a = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} a$.
ב. החל מכל שלב ההסתברות לקבל 4 לפני 5 שווה ל-0.5 וזאת באופן ב"ת בעבר.
צריך שיהיו 2 כשלונות ואחר כך הצלחה. הסיכוי הוא $(1-0.5)^2 \cdot 0.5$.

שאלה 3

מבצעים 100 הטלות ב"ת של מטבע הנופל על "עץ" בסיכוי $\frac{1}{3}$ ונופל על "פלי" בסיכוי $\frac{2}{3}$. מהי ההסתברות שמספר הפעמים בהן הושגה תוצאה שונה מהקודמת הוא זוגי?

פתרון

מספר זה יהיה זוגי אם תוצאת ההטלה ה-100 תהיה זהה לתוצאת ההטלה הראשונה. זה קורה בסיכוי $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

אם יש מספר זוגי של מהפכים בין ההטלה הראשונה לאחרונה, אז בהטלה האחרונה חוזרים לתוצאת ההטלה הראשונה. אם יש מספר אי זוגי של מהפכים אז האחרונה שונה מהראשונה. הערה: מספר זה אינו בעל התפלגות בינומית. הסיבה היא שיש תלות בין המאורעות שפעם אחת היה שינוי ושבפעם הבאה יהיה שינוי. אם בפעם מסוימת היה שינוי אז ברור שבשתי הטלות שכנות הושגו תוצאות שונות ולכן משיקולי סימטריה, ההסתברות המותנה שהשניה מהן היא "עץ" היא $\frac{1}{2}$. כך נקבל שההסתברות לשינוי במעבר הבא היא חצי ולא כמו מה שקיבלנו בחישוב ההסתברות הלא מותנה.

שאלה 4

יהי X - משתנה מקרי המתפלג $U[1, b]$. יהי A - המאורע ש X מקבל ערך שהוא כפולה שלמה של 2 (זאת אומרת שהוא מקבל ערך זוגי). יהי D - המאורע ש X מקבל ערך שהוא כפולה שלמה של 3.

- א. מצאו ערך אפשרי של b הגדול מ 3, כך שהמאורעות A ו D יהיו בלתי תלויים.
ב. מצאו ערך אפשרי של b הגדול מ 3, כך שהמאורעות A ו D יהיו תלויים.

פתרון

אם $b = 6$ אז $P(D) = \frac{2}{6}$, $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(A \cap D) = \frac{1}{6}$ ומתקיים $P(A \cap D) = P(A)P(D)$ והמאורעות הם ב"ת.
אם $b = 5$ אז $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(D) = \frac{1}{5}$, $P(A \cap D) = 0 \neq P(A)P(D)$ והמאורעות הם תלויים.

שאלה 5

ישנם שני סוגים של מזג אוויר: בהיר וגשום. בכל יום משתנה מזג האוויר ביחס ליום הקודם בסיכוי p ונשאר אותו מזג אוויר בסיכוי $1 - p$. השינויים בין זוגות שונים של ימים עוקבים הם בלתי תלויים.
א. נניח שביום ראשון היה גשום. מהי ההסתברות שגם ביום שלישי יהיה גשום?
ב. נניח שבימי ראשון ושלישי היה אותו מזג אוויר, מהי ההסתברות שבשלושת הימים ראשון, שני ושלישי היה אותו מזג אוויר?

פתרון

- א. ביום שלישי יהיה אותו מזג אוויר כמו ביום ראשון אם פעמיים לא ישתנה מזג האוויר או שפעמיים הוא ישתנה. לכן ההסתברות היא $p^2 + (1 - p)^2$.
ב. יהי C המאורע שביום שלישי יהיה אותו מזג אוויר כמו ביום ראשון.

יהי B המאורע שביום שני יהיה אותו מזג אוויר כמו ביום ראשון.

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2 + p^2}$$

שאלה 6

גרף נקרא גרף קשיר אם עבור כל צומת שבו, יש מסלול לכל צומת אחר שבו. המסלולים יכולים להיות בכל אורך.

נתון גרף לא מכוון בעל n צמתים, בו בין כל זוג צמתים קיימת קשת בהסתברות 0.5 ובאופן בלתי תלוי בקורה בין כל זוגות הצמתים האחרים.

א. נניח ש $n = 3$. מהי ההסתברות שהגרף קשיר?

ב. נניח ש $n = 100$. מהי בקירוב ההסתברות שהגרף קשיר? הוכיחו את טענתכם.

פתרון

א. הגרף קשיר אם יש בו 3 או 2 קשתות. לכן ההסתברות שהוא קשיר היא

$$0.5^3 + \binom{3}{2} 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5$$

ב. נראה שההסתברות שהגרף קשיר היא בקירוב 1.

כדי שיהיה מסלול בין זוג צמתים נתון, די בכך שקיים צומת אחר שמחובר לשניהם (זהו תנאי מספיק אך לא הכרחי). עבור כל צומת אחר הסיכוי שהוא יהיה מחובר לשניהם היא

$$0.5^2 = 0.25$$

לכן הסיכוי שהוא לא יהיה מחובר לשניהם הוא 0.75. הסיכוי שאף צומת אחר לא יהיה מחובר לשניהם הוא 0.75^{98} .

לכן ההסתברות שבין שני צמתים נתונים לא יהיה מסלול אינה גדולה מ 0.75^{98} .

יש $\binom{100}{2}$ זוגות של צמתים. מכיון שהסתברות איחוד של מאורעות אינה גדולה מסכום

ההסתברויות שלהם,

אז ההסתברות שיהיה לפחות זוג אחד של צמתים שאין ביניהם מסלול באורך 2 אינה גדולה

מ $0.75^{98} \cdot \binom{100}{2}$. גודל זה הוא קטן מאוד.

שאלה 7

במשחק אורית מבצעת סדרת הימורים. בתחילת המשחק בכיסה של אורית יש 2 שקלים. בכל הימור היא מרויחה או מפסידה שקל בהסתברות שווה ובאופן בלתי תלוי בהימורים האחרים. המשחק

מסתיים כאשר לאורית אין כסף או שיש לה 3 שקלים.

א. מצאו את ההסתברות שבמשחק יהיו בדיוק שני הימורים.

ב. מהי ההסתברות שבסוף המשחק יהיו לאורית 3 שקלים בהינתן שבמשחק היו בדיוק 3 הימורים?

ג. מהי ההסתברות שבסוף המשחק יהיו לאורית 3 שקלים?

פתרון

א. כדי שיהיו שני סיבובים, אסור לאורית לנצח בסיבוב הראשון. היא צריכה להגיע לאחר הסיבוב הראשון לסכום של 1 ואז להפסידו. הסיכוי לכך הוא $0.5 \cdot 0.5$.

ב. אם היו בדיוק שלושה הימורים, אז לאחר 2 סיבובים עדיין היה לה סכום של 1 או 2. מכיון שמסכום זוגי, בהכרח עוברים לסכום אי זוגי ומסכום אי זוגי בהכרח עוברים לסכום זוגי, אז לאחר שלב 2 (שלב זוגי) בהכרח היו לה 2 שקלים. לכן אם בשלב 3 נפלה ההכרעה, אז היא בהכרח הגיעה ל 3 שקלים. לכן ההסתברות המותנה היא 1.

ג. פתרון בדרכ ראשונה

יהי a - הסיכוי שהיא תגיע אי פעם ל 3 כאשר יש לה 2 שקלים.
יהי b - הסיכוי שהיא תגיע אי פעם ל 3 כאשר יש לה שקל אחד.
מתקיים:

$$\begin{cases} a = 0.5 \cdot 1 + 0.5b \\ b = 0.5 \cdot 0 + 0.5a \end{cases}$$

מתקבל פתרון $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$. לכן, כאשר היא מתחילה עם 2 שקלים, אז סיכוייה להגיע אי פעם ל 3 שקלים הם $\frac{2}{3}$.

פתרון בדרכ שניה

צריך שהמשחק יסתיים בשלב אי זוגי. כדי לקבל הכרעה בשלב מסוים חייבים לקבל סדרה של תוצאות מסוימות עד אז. ההסתברות היא

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0.5 \cdot 0.5^{2i} = 0.5 \sum_{i=0}^{\infty} 0.25^i = 0.5 \frac{1}{1-0.25} = \frac{2}{3}$$

שאלה 8

מעמידים ששה אנשים בשורה, כך שכל הסידורים האפשריים של ששת האנשים הם שווי הסתברות. גלן הודל ואוסבלדו ארדילס הם שניים מששת האנשים.

- א. מהי ההסתברות שגלן הודל ואוסבלדו ארדילס עומדים בשני קצוות השורה?
- ב. מהי ההסתברות שאף אדם לא מפריד בין גלן הודל ואוסבלדו ארדילס?
- ג. מהי ההסתברות ששני אנשים עומדים בין גלן הודל ואוסבלדו ארדילס?

הערה: בכל הסעיפים נסו להשתמש במרחב מדגם שבו פחות מ 30 נקודות. זהו הפתרון המועדף כאן.

פתרון

אפשר לעבוד עם מרחב מדגם של $6!$ נקודות. כך החישובים אינם מסובכים. אבל אפשר פשוט יותר. נעבוד עם מרחב מדגם סימטרי של $\binom{6}{2}$ נקודות. כל נקודה תציין בחירה של זוג מקומות לא סדור עבור גלן הודל ואוסבלדו ארדילס. רק אם נבחרים עבורם שני המקומות שבקצוות אז יש ביניהם 4 אנשים. לכן ההסתברות בסעיף א' היא $\frac{1}{15} = \frac{1}{\binom{6}{2}}$. יש 5 זוגות של מקומות שמתאימות לסעיף ב' ולכן בסעיף ב' היא $\frac{5}{\binom{6}{2}}$. יש שלושה זוגות של מקומות שמתאימים לסעיף ג' ולכן בסעיף ג' ההסתברות היא $\frac{3}{\binom{6}{2}}$.

שאלה 9

יהי X - משתנה מקרי המתפלג $G(p)$ עבור $0 < p < 1$.
יהי A - המאורע ש X יקבל ערך זוגי.

האם קיים פרמטר p כך ש $P(A) < 0.5$?
האם קיים פרמטר p כך ש $P(A) > 0.5$?
האם קיים פרמטר p כך ש $P(A) = 0.5$?

פתרון

$$P(X \text{ even}) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^{2k+1} = q \sum_{k=0}^{\infty} pq^{2k} = qP(X \text{ odd}) < P(X \text{ odd})$$

לכן עבור כל פרמטר $0 < p < 1$ ההסתברות לקבלת ערך זוגי היא קטנה מחצי.
