

בחינה בקורס "פונקציות ממשיות"

0366. 2/06

המועד: פרופ' גוריס צירלסון

משך הבחינה: 4 שעות.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהוא.

מכסימום הנקודות האפשרי הוא $5 \cdot 25 = 125$. זכותך לענות על כל שאלה או חלק משאלה שתבחר. הציון הוא:

$$\text{סה"כ הנקודות, } \min(100, \text{ציון}).$$

בכל הטענות המוכחות בקורס אפשר להשתמש ללא הכחה בפתרונות לשאלות 1, 3-5. בפתרון לשאלה 2 אפשר להשתמש בטענות המוכחות לפני הטענה הנחונה.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח או הפוך את כל אחת מן ה-10 הטענות הבאות.

1.1 אם כל הערכים של פונקצית סדרגות $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הם מספרים שלמים, אזי $\int \varphi$ הוא מספר שלם.

1.2 פונקציה $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקצית סדרגות אם ורק אם הקבוצה $\{x: \varphi(x) \leq c\}$ היא אלמנטרית עבור כל $c \in \mathbb{R}$.

1.3 איחוד בן סניה של קבוצות אלמנטריות הוא קבוצה אלמנטרית.

1.4 כל פונקציה מן L^{loc} היא הפרש של שתי פונקציות סדרגות.

1.5 כל פונקציה מן L_1 היא הפרש של שתי פונקציות מן L^{loc} .

1.6 כל פונקצית סדרגות היא הפרש של שתי פונקציות מן L_1 .

1.7 קבוצה $S \subset \mathbb{R}^2$ היא סופית או בת סניה אם ורק אם החתך $S_x^+ = \{y: (x, y) \in S\}$ הוא קבוצה סופית או בת סניה עבור כל $x \in \mathbb{R}$.

1.8 קבוצה $S \subset \mathbb{R}$ היא סידדה אם ורק אם היא פתוחה או סגורה.

1.9 אם פונקציה f רציפה על $[-1, 0]$ וגם על $[0, 1]$, אזי $f \in L_1[-1, 1]$.

1.10 אם פתקציה f רציפה על $(-1,0)$ וגם על $(0,1)$, אזי $f \in L_1(-1,1)$.

שאלה 2

הוכח את למה של פטו (Fatou) לפי התרשים הבא.

משפט. תהינה $f_1, f_2, \dots \in \mathbb{R}^+$ ו- $f_k(x) \rightarrow f(x)$ כב"ס. ניה ש- $??$ כב"ס עבור כל k , ו- $?? < \infty$. אזי $f \in \mathbb{R}^+$ ו- $?? \leq \sup ??$.

ההוכחה מבוססת על משפט ההתכנסות המיטוטונדי:

$$\textcircled{1} \text{ תהינה } \dots \text{ אזי } f \in \mathbb{R}^+ \text{ ו- } \int f = \lim_k \int f_k$$

הוכחה.

- ② נגדיר $l_k(x) = ??$, אזי $l_k \in \mathbb{R}^+$ עבור כל k . אכן, $l_k \in \mathbb{R}^+$ על סוסך ②.
- ③ $\int l_k \leq ??$ עבור כל k . אכן, $...$
- ④ $l_k \uparrow ??$ ספני ש- $...$
- ⑤ לכן $\lim_k \int l_k = \int f$ על סוסך ②.
- ⑥ איפוא: $...$

שאלה 3

מצא את השגיאה העקרונית בפתרון הנתון. תן פתרון נכון.

בעיה. עבור איזה $\alpha, \beta > 0$ הטור

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^\alpha \sin^2(k^\beta x)}$$

סגדיר פונקציה $f \in L_1[0,1]$?

פתרון.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_k \int_0^1 \frac{dx}{1 + k^\alpha \sin^2(k^\beta x)} = \quad (k^\beta x = k^{-\alpha/2} u) \\ &= \sum_k \frac{1}{k^{\alpha/2 + \beta}} \int_0^{k^{\alpha/2}} \frac{du}{1 + k^\alpha \sin^2(k^{-\alpha/2} u)}. \end{aligned}$$

אבל

$$f_k(u) = \frac{1}{1 + k^\alpha \sin^2(k^{-\alpha/2} u)} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{1 + u^2} = f(u),$$

כי $\sin \alpha \sim \alpha$ עבור $\alpha \rightarrow 0$. לכן

$$f_k \chi_{[0, k^{\frac{\alpha}{2} + \beta}]} \sim f \chi_{(0, \infty)} ;$$

$$\int_0^{k^{\frac{\alpha}{2} + \beta}} f_k \frac{1}{k} \int_0^\infty f = \arctan u \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

וההתבנסות של הטור

$$\sum_k k^{-(\frac{\alpha}{2} + \beta)} \int f_k$$

שקולה להתבנסות של הטור

$$\sum_k k^{-(\frac{\alpha}{2} + \beta)} .$$

איפוא, אם $f \in L_1$ אם ורק אם

$$\frac{\alpha}{2} + \beta > 1 .$$

שאלה 4

הוכח שקבוצה $S \subset \mathbb{R}$ היא זניחה אם ורק אם קיימת פונקציה $f \in L_1$ המקיימת

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = +\infty$$

עבור כל $x_0 \in S$.

שאלה 5

הפוך את הטענה הבאה על ידי חגמה נגדית.

טענה. תהי $f \in L_1$ ו-

$$\int_a^b f > 0$$

עבור כל a, b המקיימים $0 < a < b < 1$. אזי $f(x) > 0$ כב"ס על $[0, 1]$.

0366. 2106

סמסטר קיץ, מועד ב', תשנ"ד
תאריך הבחינה: 09.10.94

בחינה בקורס "פונקציות מסשיות"

הסורה: פחפ' בוריס צירלסק

משך הבחינה: 3.5 שעות.

אין להשתמש בחומר עזר כתשהוא.

מכסימום הנקודות האפשרי הוא $5 \cdot 25 = 125$. זכותך לענות על כל שאלה או חלק משאלה שתבחר.
הציון הוא:

(סה"כ הנקודות, 100) $\text{מום} = \text{ציון}$.

בכל הטענות המוכחות בקורס אפשר להשתמש ללא הוכחה בפתוחות לשאלות 1, 3-5. בפתרון לשאלה 2 אפשר להשתמש בטענות המוכחות לפני הטענה הנתונה.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח או הפוך את כל אחת מן ה-10 הטענות הבאות.

1.1 פונקציה $f: \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}$ היא פונקציות סדרגות אם ורק אם היא רציפה כב"מ, אינטגרובילית, וקבוצת הערכים $f(\mathbb{R}^2)$ היא סופית.

1.2 אותו הדבר עבור $f: \mathbb{R} - \mathbb{R}$.

1.3 כל פונקציה מן L^{inc} היא חסומה מלמעלה.

1.4 כל פונקציה מן L^{inc} היא חסומה מלמטה.

1.5 אם $f_k \uparrow f$, $\lim \int f_k < \infty$, וכל f_k היא פונקציות סדרגות, אזי $f \in L^{\text{inc}}$.

1.6 אם $f_k \uparrow f$, $\lim \int f_k < \infty$, וכל f_k שייכת ל- L^{inc} , אזי $f \in L_1$.

1.7 אם $f_k \uparrow f$, $\lim \int f_k < \infty$, וכל f_k שייכת ל- L_1 , אזי f היא פונקציות סדרגות.

1.8 $\int \chi_S = 0$ אם ורק אם הקבוצה S היא סופית או בת סניה.

1.9 פונקציה חסומה היא מדידה אם ורק אם היא רציפה כב"מ.

1.10 אם קבוצה $S \cap (-1, 0)$ סגורה וקבוצה $S \cap (0, 1)$ פתוחה, אזי קבוצה $S \cap (-1, 1)$ מדידה.

שאלה 2

הוכח את המשפט המבסס את הקדם של אינטגרל על L^{∞} לפי התרשים הבא.

משפט. תהיה $\dots \geq \varphi_2 \geq \varphi_1$ פתקציות מדוגות על \mathbb{R} או \mathbb{R}^2 המקיימות $\lim_k \varphi_k(x) = 0$ כב"ס. אזי

ההוכחה מבוססת על משפט של Heine-Borel:

① כל כיסוי (פתוח? סגור?) של קבוצה חסומה (פתוחה? סגורה?) ב- \mathbb{R}^n סגור תת-כיסוי סופי.

הוכחה.

- ② נתבונן בשתי קבוצות זניחות: ראשית, \dots שנית, \dots עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי \dots של \dots המקיים \dots (יש הבדל בין \mathbb{R} לבין \mathbb{R}^2 בסעיף הזה: \dots אבל זה לא משנה את העניין כי \dots)
- ③ יהי $\varepsilon > 0$ נתון. עבור כל נקודה שאינה בקבוצה \dots קיימת סביבה \dots ומספר \dots כאלה ש- $\dots < \varepsilon$?? עבור כל \dots (הסביבה היא \dots ב- \mathbb{R} ו- \dots ב- \mathbb{R}^2).
- ④ נקח קבוצה אלמנטרית (פתוחה? סגורה?) \dots המקיימת \dots כל ה- \dots יחד עם כל ה- \dots מהווים כיסוי \dots של \dots על סמך ③ בוחרים תת-כיסוי \dots
- ⑤ נקח מספר $\dots = V$ אזי $\dots \leq \varphi_N$ מפני ש- \dots לכן $\dots \leq \int \varphi_N$.
- ⑥ איפוא: עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים N המקיים \dots

שאלה 3

נתונים שני פתרונות של בעיה אחת. עבור כל אחד מן הפתרונות קבע, האם:

- (א) התשובה נכונה והפתרון מבוסס.
 - (ב) התשובה נכונה, אבל הפתרון דורש נימוק נוסף.
 - (ג) התשובה לא נכונה והפתרון לא נכון.
- במסקרה (ב) השלם את הפתרון.
 במסקרה (ג) ציין את השגיאה העקרונית (אחת מהן, אם יש יותר).
 אם הפתרונות שניהם לא נכונים, אז תן פתרון נכון.

בעיה מצא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sin(x/n)} dx.$$

פתרון 1.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sin(x/n)} dx \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \cdot \frac{x}{n}} dx \approx \sqrt{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

הקירוב השני מותר כי הפונקציה $(\sin x)/(x\sqrt{x})$ אינטגרבילית על $(0, \infty)$; אכן, $|\sin x| \leq 1$ וגם $|\sin x| \leq x$. הקירוב הראשון מותר לפי הערכת השגיאה הבאה:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sin \frac{x}{n}} dx - \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \cdot \frac{x}{n}} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin \frac{x}{n}} - \frac{1}{\frac{x}{n}} \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n\pi}{2} \cdot \max_{0 \leq x \leq n\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin \frac{x}{n}} - \frac{1}{\frac{x}{n}} \right);$$

אבל

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin \frac{x}{n}} - \frac{1}{\frac{x}{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n} \sin \frac{x}{n}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{n} \right)^3 + \dots \right)}{\frac{x}{n} \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{n} \right)^3 + \dots \right)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{x}{n} \right)^3}{\left(\frac{x}{n} \right)^2} = \frac{\sqrt{x}}{6n};$$

מכאן השגיאה חסומה כאשר $\infty - n$.
איפוא: הגבול הוא אינסוף.

פתרון 2.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sin(x/n)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nu}{\sqrt{u} \sin u} du;$$

הפונקציה $f(u) = (\sin nu)/(\sqrt{u} \sin u)$ אינטגרבילית על $(0, \pi/2)$; נכון האינטגרל שואף לאפס על סמך משפט של ריסן-לבג (Riemann-Lebesgue).
איפוא: הגבול הוא אפס.

שאלה 4

תהי $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ הוכח שנוסחה

$$F(a, b, r) = \int_{(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2} f(x, y) dx dy$$

מגדירה פונקציה רציפה $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

שאלה 5

הפרך את הטענה הבאה על ידי דוגמה נגדית.

טענה. נניח ש- $f - f_k \in L_1$ ו- $(\sup_k |f_k|) \in L_1$. אזי קיימות סדרת סונטות של פונקציות אינטגרביליות $u_1 \geq u_2 \geq \dots, l_1 \leq l_2 \leq \dots$ המקיימות $l_k(z) \leq f_k(z) \leq u_k(z)$ כב"ס, ו- $f - f_k \in L_1$, ו- $f - f_k \in L_1$.