סמסטר ב'
תשנ"ד, קיץ
5.7.1994

בהצלחה!

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מבחן בפונקציות ממשיות

לתלמידי מתימטיקה, שנים ב', ג'.

המורה: ד"ר דוד סולוי.

משך המבחן: 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

חלק א': ענה על אחת מבין השאלות 1, 2.

1. הוכח כי המדה החיצונית והמדה הפנימית ב-$\mathbb{R}^n$ אינווריאנטיות להזזות (כלומר, לכל קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ ולכל $v \in \mathbb{R}^n$, $m^*(A+v) = m^*(A)$ וכן $m_*(A+v) = m_*(A)$.)

2. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית. תהי f פונקציה מדידה על $\mathbb{R}^n$, אשר מתאפסת מחוץ ל-E, וכן $0 \le f(x) < 1$, לכל $x \in \mathbb{R}^n$. הוכח, כי לכל $\varepsilon > 0$ יש $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, כך ש
$$m\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon .$$

חלק ב': ענה על שתיים מבין השאלות 3, 4, 5, 6.

3. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$. נתון כי $m^*(E) = m_*(E) < \infty$. הוכח, כי E מדידה.

4. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ מדידה. תהי f פונקציה אי שלילית, אינטגרבילית על E. נגדיר, לכל r טבעי
$$f_r(x) = r \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{r}\right)^{\alpha}\right)$$
כאשר α מספר ממשי נתון. הוכח, כי אם $\alpha \ge 1$, אז הפונקציות f_r אינטגרביליות על E וכן
$$\lim_{r\to\infty} \int_E f_r = \begin{cases} \int_E f & , \alpha = 1 \\ 0 & , \alpha > 1 \end{cases}$$
נמק היטב את הדיון.

5. תהי f פונקציה אינטגרבילית על $\mathbb{R}$. יהי $a>0$.

א. הוכח, כי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a \left|f\left(\frac{x}{a}+n\right)\right| dx$ מתכנס.

ב. הוכח כי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+n\right)$ מתכנס, כמעט לכל x ממשי.

ג. הוכח כי סכום הטור ב(ב'), $F(x)$, הוא מחזורי, בעל מחזור a (כלומר $F(x+a)=F(x)$ כמעט לכל x), ולכן F אינטגרבילית על $(0,a)$.

6. תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ מדידה, ותהי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות על E, אשר מתכנסת במדה לפונקציה מדידה f. נניח כי $|f_k|\le g$ לכל k, כאשר g פונקציה אינטגרבילית על E.

א. הוכח, כי f אינטגרבילית על E.

ב. נניח כי $m(E)<\infty$. הוכח כי

$$\int_E |f_k-f| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

ג. הכלל את (ב') לקבוצה מדידה כלשהי E.

בהצלחה!

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד ב'
סמסטר ב'
י"ג באב
1991.

מבחן בפונקציות ממשיות

לתלמידי מתמטיקה שנים ב', ג'.

המורה: ד"ר דוד סודרי

משך המבחן: 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

חלק א'

ענה על אחת מבין השאלות 1, 2.

1. תהי E קבוצה מדידה (ב-$\mathbb{R}^n$) ותהי $f: E \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. הוכח כי f אינטגרבילית על E אם ורק אם f מדידה וקיימת פונקציה g אינטגרבילית על E כך ש $|f(x)| \le g(x)$ כמעט לכל x ב E.

2. תהי f אינטגרבילית על $\mathbb{R}^n$ ויהי $\epsilon > 0$. הוכח שיש $\delta > 0$, כך שלכל g אינטגרבילית, אי-שלילית, בעלת תומך בכדור סביב הראשית ברדיוס δ, וכן $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$, מתקיים

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f*g| < \epsilon .$$

חלק ב'

ענה על שלוש מבין השאלות 3, 4, 5, 6.

3. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ בעלת מדה חיצונית סופית. הוכח כי

$$\int^*_{\mathbb{R}^n} \chi_A = m^*(A) \quad , \quad \int_{*\mathbb{R}^n} \chi_A = m_*(A)$$

4. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ מדידה ו $V \subset \mathbb{R}^m$ פתוחה. נניח כי $f: E \times V \to \mathbb{R}$ מקיימת

א. לכל $v \in V$, הפונקציה $x \mapsto f(x,v)$ אינטגרבילית על E.

ב. נרשום $v = (v_1, \dots, v_m)$ ויהי $1 \le j \le m$ נתון. נניח כי לכל $x \in E$, הפונקציה $v \mapsto f(x,v)$ גזירה לפי v_j, וכי לכל $v \in V$, הפונקציה $x \mapsto \frac{\partial}{\partial v_j} f(x,v)$ אינטגרבילית.

ג. נניח כי יש g אינטגרבילית על E כך ש (x)

לכל $x \in E$, $v \in V$

(31)

$\frac{\partial}{\partial v_j} F(v) = \int_E \frac{\partial}{\partial v_j} f(x,v)\,dx$ לכל $v\in V$.

5. תהי $\{E_r\}_{r=1}^\infty$ סדרת קבוצות מדידות (ב-$\mathbb{R}^n$) כך
ש- $\sum_{r=1}^\infty m(E_r)<\infty$. הוכח כי יש $F\subset\mathbb{R}^n$
כך ש $m(F)=0$, וכן כל $x\in\mathbb{R}^n\setminus F$ נמצא לכל
היותר מספר סופי של קבוצות E_r . (הערה: עבור x
שונים, מספר סופי זה יכול להיות שונה).

6. תהי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות עולות על $\mathbb{R}$.
נניח כי לכל $x\in\mathbb{R}$, מתקיים

$$\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|<\infty$$

הוכח כי $\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ טור מתכנס כמעט לכל $x\in\mathbb{R}$
וכן $\int_a^b \sum_{n=1}^\infty f_n'(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n'(x)\,dx$.

בהצלחה !

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א'
סמסטר ב'
כ"ו בתמוז,
תשנ"א,
8.7.1991

מבחן בפונקציות ממשיות

לתלמידי מתמטיקה שנים ב', ג'.

המורה: ד"ר דוד סודרי

משך המבחן: 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

חלק א' ענה על אחת מבין השאלות 1, 2.

1. א. הגדר התכנסות במדה של סדרת פונקציות.

ב. תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה מדידה ותהי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות על E, סופיות כב"מ ומתכנסות במדה לפונקציה f. הוכח כי קיימת ל-$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה המתכנסת ל-f נקודתית כב"מ.

ג. תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ בעלת מדה סופית ותהי f פונקציה מדידה על E, סופית כב"מ. הוכח שיש סדרת פונקציות מ-$C_c(\mathbb{R}^n)$, המתכנסת נקודתית ל-f כב"מ.

2. יהי $1\le p$ ותהי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מ-$L^p(\mathbb{R}^n)$ כך ש-

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_r-f_m|^p \xrightarrow[r,m\to\infty]{} 0$$

הוכח שיש $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ כך ש-

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k-f|^p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 .$$

חלק ב' ענה על שלוש מבין השאלות 3, 4, 5, 6.

3. תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ מדידה ותהי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות על E. נניח כי $\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k|<\infty$. הוכח כי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס למספר סופי כמעט לכל $x\in E$.

הראה כי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ פונקציה אינטגרבילית על E וכי

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\,dx$$

4. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. ויהי h מספר רציונלי. לכל מספר טבעי N, נגדיר

$$f_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h a_n x}.$$

א. הוכח כי הטור $\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 |f_{m^2}(x)|^2\,dx$ מתכנס.

ב. הראה כי אם $m^2 \leq N < (m+1)^2$, אז

$$\left| f_N(x) - \frac{m^2}{N} f_{m^2}(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{N}}$$

ג. הסק, כי כמעט לכל $x \in [0,1]$, $f_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

5. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. נניח כי יש $0<\alpha<1$, כך שלכל רווח J ב-$\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$m^*(A \cap J) \leq \alpha\, m(J).$$

א. הוכח כי A מדידה ומצא את $m(A)$.

ב. הוכח כי אין $A \subset \mathbb{R}^n$, כך שלכל רווח J מתקיים

$$m^*(A \cap J) = \alpha\, m(J)$$

6. תהי $E \subset \mathbb{R}^n$ בעלת מדה סופית. תהי $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות וסופיות על E, ונניח כי יש לה תת סדרה המתכנסת נקודתית לאפס כב"מ ב-E.
הוכח כי יש סדרת מספרים ממשיים $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $\sum_{k=1}^{\infty}|t_k| = \infty$ וכן $\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k(x)$ מתכנס כב"מ ב-E.

(רמז: השתמש במשפט אגורוף.)

בהצלחה!