

פונקציות ממשיות
לתלמידי מחימטיקה שנים ב-ג
המורה: פרופ' מ. סמורודינסקי

משך הבחינה: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות.

שאלה 1

א. $f_n(x)$ הוכח שאם סידרת פונקציות אינטגרביליות.
 $f(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$ היא פונקציה אינטגרבילית א:

ב. תן דוגמא לסידרת פונקציות $f_n(x)$ אינטגרביליות וכך ש-

$$\int_R \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f_n(x) dx$$

$$\int_R \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f_n(x) dx$$

שאלה 2

א. $f(x)$ מונוטונית עולה ב- $[a, b]$ הוכח $\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$
 ב. $f(x)$ מונוטונית עולה ב- $[a, b]$ וקיים $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$
 הוכח ש- $f(x)$ רציפה בהחלט.

שאלה 3

תהי E קבוצה מדידה וחטומה. יהי $\delta > 0$. תהי $A \subset E$ קבוצת נקודות כך שעבור כל $x \in A$

$$\frac{\lim_{h \rightarrow 0} \mu([x-h, x+h] \cap E)}{2h} \leq 1 - \delta$$
 נסח והוכח טענה לגבי $\mu^*(A)$

פונקציה מדידה בקטע $[0, 1]$ ועבור כל $x \in [0, 1]$ קיים

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 1$$

$$f(1) - f(0) \geq 1 \quad \text{הוכח:}$$

(נסח את המשפטים עליהם אתה מסתמך).

ו- A קבוצה מדידה בקטע $[0, 1]$ אם עבור אל אינטרוואל $I \subset [0, 1]$

$$|A \cap I| \geq \alpha |I|$$

מתקיים כ-

$$\frac{m(A \cap I)}{m(I)} \geq \alpha$$

$$m(A) = 1 \quad \text{הוכח}$$

הוכח: תנאי הכרחי ומספיק ש- $f(x)$ המוגדרת בקטע $[a, b]$ היא בעלת השתנות חסומה הוא שקיימת פונקציה מונוטונית עולה בקטע $[a, b]$ ועבור כל $x_1 < x_2$ מתקיים

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$$

בהצלחה!!!

1
 קיימת קבוצה A מדידה כך שעבור כל $x \in A$ ועבור כל $\epsilon > 0$
 הקטע $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ מכיל תת קטע שאיננו שייך ל- A ו- $m(A) > 0$

2
 קבוצה מדידה בקטע $[0, 1]$ כך שהקבוצות
 $A_n = A + \frac{\sqrt{x}}{n}$, $n=1, 2, \dots$
 זרות $\iff m(A) = 0$

3
 קיימות קבוצות (לא בהכרח מדידות) A ו- B וקבוצות C ו- D פתוחות
 כך ש- $C \cap D = \emptyset$ ו- $m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$

4
 הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

 רציפה בהחלט בקטע $[0, 1]$

5
 קיימת סדרת פונקציות חיוביות ומדידות $f_n(x)$ המוגדרות בקטע $[0, 1]$
 כך ש- $\lim \int_0^1 f_n(x) dx = 1$! $\int_0^1 \lim f_n(x) dx = 0$

6
 קיימות A ו- B קבוצות זרות כך ש- $m_*(A \cup B) < m_*(A) + m_*(B)$

פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה \Leftrightarrow קבוצת הנקודות בהן לא קיימת הנגזרת של $f(x)$ היא בת מניה.

את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = (p, q) \text{ רציונלי} \\ 0 & \text{אי רציונלי} \end{cases}$$

אי אפשר להציג כהפרש של שתי פונקציות מונוטוניות עולות.

קיימת פונקציה $f(x)$ כך שעבור כל קבוצה פתוחה G , $[f \in G] = \{x \mid f(x) \in G\}$ היא קבוצה מדידה אבל $f(x)$ אינה מדידה.

קיימת סידרת פונקציות $f_n(x)$ עבור כל x אבל עבור כל קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ שווה על A^c מדידות $0 \leq x \leq 1$ כך ש- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ איז התכנסות במידה $m(A) = 0$, A

קיימת סידרת פונקציות $f_n(x)$ המוגדרות בתחום $0 \leq x < \infty$ בכל מקום אבל עבור כל חת סידרה $\{u_k\}$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ איז התכנסות לפי מידה של $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$

קיימת פונקציה מדידה $f(x)$ המוגדרת עבור $-\infty < x < \infty$ כך מסידרת הפונקציות

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & -N \leq x \leq N \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מקיימת $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx$ קיים וסופי.

פונקציה רציפה בהחלט בתחום $0 \leq x \leq 1$ $f(0) = 0$ $f'(x) = 1$ $f(x) \equiv x$

14 -----

קיימת קבוצה A בקטע $[0,1]$ כך ש- $m(A) = 1$ חלקית ל- A . צפיפות לבג תחתונה קטנה ממש מ-1.
 וכך שעל קבוצה אינסופית

15 -----

קיימת פונקציה $f(x)$ בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ כך שעבור כל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה $\pi: x_0=0 < x_1 < \dots < x_n=1$ עם נורמת חלוקה קטנה מ- ϵ (כלומר $x_i - x_{i-1} < \epsilon$ $i=1, \dots, n$)

$$\int_0^1 f - \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq 1$$

16 -----

קיימת פונקציה לא מדידה $f(x)$ $0 \leq x \leq 1$ כך ש- $\int_0^1 f(x) \geq 0$ (מספר נגזר תחתון) עבור כל x בקטע.

17 -----

נתונה ספונקציה

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x dF(x) = \frac{5}{8}$$

בהצלחה!!!

חלק ב': (25 נקודות)

ענה על אחת משתי השאלות הבאות. נסח במדויק משפטים או משפטי עזר בהם אתה משתמש.

שאלה 1

- א. הגדר מהי קבוצה אפסית.
- ב. הוכח שאם $f(x)$ פונקציה חסומה ונקודות אי הרציפות שלה מהוות קבוצה אפסית אז אינטגרביילית רימן בקטע $[0,1]$; $0 \leq x \leq 1$

שאלה 2

תהי $f(x)$ אינטגרביילית בקטע $[a,b]$.

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$
 נסח והוכח משפט המקשר בין $F(x)$ ו- $f(x)$.

בהצלחה!!!

חלק א'

שאלה 1

קיימת קבוצה A (כלשהי) בקטע $[0, 1]$ וקיים מספר ממשי $0 \leq \alpha < 1$ כך שעבור כל אינטרוול J מתקיים

$$m^*(A) > 0 \quad \text{ו-} \quad m^*(A \cap J) < \alpha \cdot m(J)$$

שאלה 2

קיימת פונקציה רציפה במידה שווה בקטע פתוח אבל לא רציפה בהחלט שם.

שאלה 3

קיימת פונקציה לא מדידה $f(x)$ בקטע $[0, 1]$ ו- M מספר ממשי כך ש- $D_x f(x) > M$ (מספר נגזר תחתון) עבור כל x .

שאלה 4

אם ל- A קיים כסוי ויטלי אז A מדידה.

שאלה 5

הפונקציה $F(x)$ מוגדרת באופן הבא

$$F(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x dF(x) = -\frac{1}{8}$$

אז

שאלה 6

אם $f(x)$ פונקציה מוגדרת גזירה בכל בקודות הקטע $[0, 1]$ אז נגזרתה $f'(x)$ אינטגרבילית שם

שאלה 7

סידרת פונקציות מוגדרות ואינטגרביליות בקטע $[0, 1]$ וכך $f_n(x)$ אינטגרבילית שם אז $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

שאלה 8

קיימות קבוצות לא מדידות A ו- B כך ש- $A \subset C$ ו- $B \subset D$
 מדידות וזרות ומחלקיים
 $m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$

שאלה 9

את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

לא ניתן להציג כהפרש שתי פונקציות מונוטוניות.

שאלה 10

קיימת פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בקטע $[0, 1]$ ו- $f(0) = 0$ ו- $f'(x) = 1$
 כמעט בכל מקום אבל $f(x) \neq x$

שאלה 11

א. A קבוצת כל הנקודות בקטע $[0, 1]$ כך שבפתוח לפי בסיס \mathcal{C} לא מופיעה הספרה "0".
 ב. B קבוצת כל הנקודות בקטע $[0, 1]$ כך שבפתוח לפי בסיס "פ" לא מופיעה הספרה "0"

$$m(A) = m(B) \quad \Leftarrow$$

שאלה 12

$f(x)$ רציפה בהחלט בקטע $[0, 1]$ אז ניתן להציג אותה כהפרש שתי פונקציות מונוטוניות.

חלק ב': (50 נקודות)

ענה על שתיים משלוש השאלות הבאות. נסח במדויק משפטים או משפטי עזר בהם אתה משתמש.

שאלה 1

א. נסח את הלמה של הינה-בורל.

ב. הוכח שאם $\{I_n\}$ סידרת אינטרוולים פתוחים $n=1, 2, \dots$ כך ש- $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset (0; 1)$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \geq 1$

(אין להסתמך על התח אדיטיביות של מידת לבג)

שאלה 2

נסח והוכח את הלמה של פטו (Fatou)

שאלה 3

הוכח שאם $f(x)$ מוגדרת ורציפה בהחלט בקטע $[0, 1]$ וכך ש- $f'(x) = 0$ כמעט בכל מקום אז $f(x) \equiv C$ בכל מקום.

בהצלחה!!!