סמסטר א', מועד א', תש"ס
תאריך הבחינה: 18.2.2000

הבחינה בפונקציות ממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שני חלקים, ענה על שאלה אחת מהחלק הראשון ועל שתי שאלות מהחלק השני.
אין צורך להעתיק את נוסח השאלה, מספיק לרשום את מספרה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

ענה על שאלה אחת בלבד

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. בהנחה כי f מדידה וחסומה הוכח כי

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

כב"מ ב – $[a,b]$. לאחר מכן, קבל אותה מסקנה בהנחה כי f אינטגרבילית על $[a,b]$.

שאלה 2 (35 נקודות)

יהיו (X,Σ,μ) מרחב מידה ו - $1\le p\le\infty$. הוכח כי המרחב $L^p(X,\Sigma,\mu)$ שלם.

חלק ב'

ענה על שתי שאלות בלבד.

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$. הוכח כי קיימות פונקציות רציפות h,g על $[a,b]$ המקיימות: $g+h=f$, g רציפה בהחלט, h בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ ו – $h'=0$ כב"מ ב – $[a,b]$. הראה כי אם גם $g_1+h_1=f$ הוא פירוק כנ"ל אזי $g-g_1$ פונקציה קבועה.

שאלה 2 (35 נקודות)

תהי $\{r_k\}_{r=1}^{\infty}$ מניה של קבוצת כל המספריםהרציונליים. עבור כל k טבעי נגדיר

$$f_k(x) = \begin{cases} (x-r_k)^{-1/2}, & r_k < x \le r_k+1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכח כי $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_k$ מתכנס כב"מ על R ולפונקציה אינטגרבילית f המקיימת: לכל קטע (a,b) ולכל r מתקיים

$m((a,b) \cap \{x: f(x) \ge r\}) > 0.$

שאלה 3 (35 נקודות)

א. תהיינה f פונקציה אינטגרבילית על מרחב מידה (X,Σ,μ) ו $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על X המקיימות $|g_n(x)| \le 1$ לכל $n \in N$ ולכל $x \in X$. הוכח כי אם

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_n(x)| \, d\mu(x) = 0$$

אזי

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f(x) g_n(x)| \, d\mu(x) = 0.$$

ב. הוכח כי $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה בהחלט על $(0,\infty)$

ב ה צ ל ח ה !!

סמס' א', מועד מיוחד
תשנ"ט

9.6.99

בחינה בפונקציות ממשיות

משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

לבחינה שני חלקים. ענה על שאלה אחת מהחלק הראשון. ועל שתי שאלות מהחלק השני.

אין צורך להעתיק את נוסח השאלה, מספיק לרשום את מספרה.

אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

ענה על שאלה אחת בלבד.

שאלה 1 (60 נקודות)

הוכח (הלמה של ויטלי): תהא $E\subset\mathbb{R}$ בעלת מידה חיצונית סופית ו-$\mathcal{F}$ משפחה של קטעים המכסה את E לפי ויטלי. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה סופית של קטעים זרים בזוגות $I_1,\dots,I_N$ ב-$\mathcal{F}$ המקיימת

$$m^*\left(E\setminus\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right)<\varepsilon.$$

שאלה 2 (40 נקודות)

הוכח את המשפט הבא: יהי $1\le p<\infty$. אזי קבוצת הפונקציות הרציפות צפופה ב-$L^p[0,1]$.

הוכח את כל הטענות בהן אתה משתמש.

חלק ב

ענה על שתי שאלות בלבד

שאלה 1 (35 נקודות). נניח כי f גזירה בקטע $[0,1]$ וכי $|f'(x)| \le M$ לכל $x \in [0,1]$. הוכח כי עבור כל $E \subset [0,1]$ מדידה לפי לבג גם $f(E)$ מדידה ומתקיים $m(f(E)) \le M\, m(E)$.

שאלה 2 (35 נקודות). נניח כי f אי שלילית ואינטגרבילית לפי לבג על $[0,1]$. נניח כי

$$\int_0^1 (f(x))^n\, dx$$

קבוע (אינו תלוי ב-n טבעי). הוכח כי קיימת קבוצה מדידה לפי לבג E עבורה $f = \chi_E$ כב"מ.

שאלה 3 (35 נקודות).

א) תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצת G_δ. הוכח כי $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\in E\}$ מדידה לפי לבג ב-$\mathbb{R}^2$.

ב) תהי $E \subset \mathbb{R}$ מדידה לפי לבג. הוכח כי $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\in E\}$ מדידה לפי לבג ב-$\mathbb{R}^2$.

ג) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לפי לבג. הוכח כי הפונקציה $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\varphi(x,y) = f(x-y)$ מדידה לפי לבג.

בהצלחה!

[illegible]

סמסטר א', מועד ב', תשנ"ה
תאריך הבחינה: 28.8.95

בחינה בתורת הפונקציות הממשיות
המורה: פרופ' לזר

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה שני חלקים: ענה על שאלה אחת מהחלק הראשון
ועל שתי שאלות מהחלק השני. אין צורך להעתיק את נוסח השאלה, די לרשום
את מספרה.
אין להשתמש בחומר עזר.

חלק א'

ענה על שאלה אחת בלבד.

שאלה 1 (40 נקודות)

תאר תהליך בניית האינטגרל לפי לבג (בהנחה כי מרחב המידה נתון מראש)
הוכח את הלמה של פטו ואת משפט ההתכנסות הנשלטת.

שאלה 2 (40 נקודות)

יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. נסח את אי שוויונות הולדר ומינקובסקי ותאר את
בנית המרחבים $L^p(X,\Sigma,\mu)$, $1\le p\le\infty$. הוכח את שלמותם.

חלק ב'

ענה על שתי שאלות בלבד.

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי f פונקציה אינטגרבילית לפי לבג על $\mathbb{R}$. יהי $0<\varepsilon$. הוכח כי קיימת
פונקציה רציפה φ על $\mathbb{R}$ המתאפסת מחוץ לקטע חסום והמקיימת

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f-\varphi|\,dm<\varepsilon .$$

שאלה 2 (35 נקודות)

תהי f אינטגרבילית לפי לבג על $\mathbb{R}$. עבור $t\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$\hat{f}(t):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin tx\,dx .$$

הוכח כי $\hat{f}$ רציפה על $\mathbb{R}$ ו-

$$\lim_{|t|\to\infty}\hat{f}(t)=0 .$$

שאלה 3 (35 נקודות)

יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה סופי ותהיינה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, f פונקציות מדידות על X. הוכח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה ל- f אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\,d\mu=0.$$

שאלה 4 (35 נקודות)

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בהחלט על $[a,b]$ המתכנסת נקודתית לפונקציה בעלת השתנות חסומה f. נניח כי לכל n טבעי ולכל $a\le x\le y\le b$ מתקיים

$$f_n(y)-f_n(x)\le f_{n+1}(y)-f_{n+1}(x).$$

הוכח כי f רציפה בהחלט ב- $[a,b]$ ו

$$\lim_{n\to\infty} f_n'=f'$$

כב"מ.

ב ה צ ל ח ה !!!

מתמ 0366.2106

ע' מגמיד

סמסטר א', מועדא', תשנ"ד
תאריך הבחינה: 25.8.94

<u>בחינה בפונקציות ממשיות</u>
<u>המורה: פרופ' לזר</u>

משך הבחינה: שלוש שעות.
לבחינה <u>שלושה</u> חלקים .
ענה על שאלה <u>אחת</u> מכל חלק.
אין צורך להעתיק את נוסח השאלה.
אין להשתמש בחומר עזר.

<u>חלק א'</u>

1. (40 נקודות) תהי μ מידה על אלגברה של קבוצות $\mathcal{A}$. תן סקירה כללית על תהליך ההמשכה של μ למידה על σ-אלגברה. הוכח כי אם μ σ-סופית אזי ההמשכה של μ ל-σ-אלגברה הנוצרת ע"י $\mathcal{A}$ היא יחידה.

2. (40 נקודות) תהי f פונקציה לא יורדת בקטע $[a,b]$. תן סקירה כללית של הוכחות המשפט: f' קיימת כמעט בכל מקום. הוכח כי f' אינטגרבילית על $[a,b]$ ו-

$$\int_a^b f'(t)\,dt \le f(b)-f(a).$$

<u>חלק ב'</u>

1. (40 נקודות) תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות על (X,Σ,μ).
הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu < \infty$
אזי $\{f_n\}$ מתכנסת לאפס כמעט בכל מקום.

2. (40 נקודות) א. הוכח כי אם φ^2 מדידה ו-$\{x:\varphi(x)>0\}$ מדידה אזי גם φ מדידה (φ פונקציה ממשית על מרחב מדיד).

ב. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אי שליליות אינטגרביליות על מרחב המידה (X,Σ,μ) המתכנסת לאפס כב"מ. עבור $x\in X$ נסמן

$$g_n(x) := \max\{f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)\},\quad n=1,2,\dots$$

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x),$$

נניח כי קיים קבוע $M>0$ המקיים $\int_X g_n\,d\mu \le M$ לכל n טבעי. הוכח כי g אינטגרבילית וכי

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = 0,$$

חלק ג

1. (30 נקודות) תהי $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת ;

א. לכל $t\in[0,1]$ הפונקציה $x\to f(x,t)$ אינטגרבילית על $[0,1]$;

ב. בכל נקודה $(x,t)\in[0,1]\times[0,1]$ קיימת הנגזרת החלקית $g(x,t):=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$;

ג.

$$M:=\sup\{|g(x,t)|: 0\le x,t\le 1\}<\infty.$$

הוכח כי הפונקציה

$$F(t):=\int_0^1 f(x,t)\,dx$$

גזירה ב- $[0,1]$ וכי

$$F'(t)=\int_0^1 g(x,t)\,dx,\quad 0\le t\le 1$$

2. (30 נקודות) יהיו (X,Σ,μ) מרחב מידה סופי, $p>1$ ו - g פונקציה אינטגרבילית, נניח כי קיים קבוע M עבורו

$$\left|\int_X g\varphi\,d\mu\right|\le M\|\varphi\|_p$$

לכל פונקציה מדידה חסומה φ.

תהי $\{\psi_n\}$ סדרה לא יורדת של פונקציות פשוטות אי שליליות השואפת ל - $|g|^q$ $(q:=1-\frac{1}{p})$. נסמן $\varphi_n:=(\psi_n)^{1/p}\operatorname{sign} g$.

הוכח

$$\int_X \psi_n\,d\mu\le\int_X \varphi_n g\,d\mu\le M\left[\int_X \psi_n\,d\mu\right]^{1/p}$$

והסק מכאן כי $g\in L^q$.

ב ה צ ל ח ה !!!!