בחינה בפונק-ות ממשיות (תשס"ו)

מועד א'

המורה: אלי גלזנר

משך הבחינה שלש שעות. השימוש בחומר עזר אסור

ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות

---

1) 1א) הוכיחו את משפט בורל קנטלי:

תהי $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות מדידות חלקיות ל $[0,1]$

μ מידת לבג:

(i) אם $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) < \infty$ אז $\mu(\liminf_{i\to\infty} A_i)=0$

(ii) אם הסדרה $\{A_i\}$ בלתי תלויה אז

$$\mu(\limsup_{i\to\infty} A_i)=1 \Leftarrow \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\infty$$

2) תהי $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ מקיימת

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}<\infty$ אז $\mu(A)=0$ כאשר

$$A=\left\{x\in[0,1]:\ \frac{1}{q\varphi(q)}>\left|x-\frac{p}{q}\right|\right.$$

לא"ס. השונים יש אינסוף רציונלים $\frac{p}{q}$

p, q שלמים זרים ; $0<p$ $\}$

$\cancel{\mu(A) \leq}\ 1$

(2) (1) הראו כי אם $A \subseteq \mathbb{R}$ מדידה לבג

ובעלת מדה חיובית, $0 < \mu(A)$, אזי

הקבוצה

$$D(A) = \{x - y : \quad x, y \in A\}$$

מכילה קטע.

(2) תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ מדידה לבג ומקיימת:

$\mu((E + x) \triangle E) = 0$ לכל x רציונלי.

הראו כי $\mu(E) = 0$ או $\mu(\mathbb{R} \setminus E) = 0$.

3) א) נסחו את משפט אגורוב.

על סמך משפט אגורוב הוכיחו את משפט לוזין:

פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ היא מדידה אמ"מ היא כמעט רציפה (כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיימת קב' סגורה $F\subset[0,1]$ כך ש $\mu(F)>1-\varepsilon$ ו $f|_F$ רציפה).

ב) הראו קיום:

(i) קב' מדידה לבג E ופונקציה רציפה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $g(E)$ אינה מדידה לבג.

(ii) שתי פונקציות מדידות לבג $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהרכבן $F\circ G$ אינו מדיד לבג.

(iii) קבוצה מדידה לבג אך לא בורל.

4 (א) הוכיחו את משפט פוביני:

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות סופיות מוגדרות על וגזירות בקטע $[0,1]$. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ מתכנס כ.ת. אז קיים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$

הסיקו את המשפט הבא:

אם f אינטגרבילית ב $[0,1]$ אז הפונקציה

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

גזירה כ.ת. ומתקיים השוויון $\varphi'(x) = f(x)$ כ.ת.

(ב) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מניה של המספרים הרציונליים בקטע $[0,1]$ הראו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{|x-a_n|}}$$

מתכנס כ.ת.

בהצלחה

מבחן בפונקציות ממשיות (תשנ"ג, סמסטר ב') $\boxed{\text{מועד א'}}$

משך המבחן 3 שעות.

(ללא חומר עזר)

חלק I (60%) הוכיחו אחת מתוך 3 הטענות הבאות.

1) אם $E \subset \mathbb{R}$ מדידה בעלת מידה חיובית אז הקבוצה $A=\{x-y;\ x,y\in E\}$ מכילה קטע לא מנוון.

2) הסדרה $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ הינה בסיס ל $L_2(\mathbb{T})$.

3) תהינה f_k, f ב L_1 כך שמתקיים $f_k \xrightarrow{\text{כ.ת.}} f$ הוכיחו כי

$\|f_k - f\|_1 \longrightarrow 0$ אמ"מ $\|f_k\|_1 \to \|f\|_1$.

(הדרכה: הניחו קודם כי $f_k \geq 0$ והשתמשו בנוסחה

$$|f - f_k| = f + f_k - 2\min(f_k, f).$$

אח"כ השתמשו בפירוקים: $f = f^+ - f^-$, $f_k = f_k^+ - f_k^-$).

מבחן בפונק' ממשיות (מועד א')

חלק II הוכיחו או הפריכו 3 מן הטענות הבאות:

1) אם f_n מדידות ו- $f_n \xrightarrow{\text{כ.ת.}} f$ אז f מדידה.

2) $A \subset [0,1]$ מדידה וקיים $0 < y < |A|$ אז קיימת $B \subset A$ מדידה שעבורה $y = |B|$.

3) אם f רציפה בקטע ו- A קבוצה בעלת מידה אפס אז $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ בעלת מידה אפס.

4) $L_\infty(\mathbb{R})$ מרחב בנך ספרבילי.

בהצלחה

1.9.93

מבחן בפונקציות ממשיות (תשנ"ג סמסטר ב' $\boxed{\text{מועד ב'}}$)
פרופ' גלזנר

משך המבחן 3 שעות
(ללא חומר עזר)

(60%) **חלק I** הוכיחו אחת מתוך 3 הטענות הבאות.

1) אם $f_n \xrightarrow{\text{כ.ת.}} f$ וקיימת $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ כך
שלכל n $|f_n| \le \varphi$ אז $f_n \to f$
כמעט במדה שוה.

2) לכל קבוצה מדידה E בעלת מדה חיובית
יש קבוצה חלקית בלתי מדידה.

3) נסחו והוכיחו את למת הכיסוי של ויטלי.

מבחן בפונקציות ממשיות (מועד ב')

חלק II הוכיחו או הפריכו 3 מן הטענות הבאות

1) יהי f מדידה על $[0,1]$ ומקיימת $f|_{[\varepsilon,1]} \in L_1[\varepsilon,1]$ לכל $0<\varepsilon\le 1$, אז גם $f \in L_1[0,1]$.

2) כל פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה על קטע $[a,b]$ מקיימת
$$f(b)-f(a)=\int f'(t)\,dt.$$

3) $f_n \xrightarrow{L_2} f \Longrightarrow f_n \to f$ במידה.

4) A הינה מדידה אם"ם לכל V פתוחה
$$|V| = |V\cap A|_e + |V\setminus A|_e.$$
(הניחו כי קריטריון קרה-תיאודורי למדידות ידוע)

בהצלחה.

84

בחינה בפונקציות ממשיות (מועד ב' תש"ן)

המורה אלי גלנט

משך הבחינה 4 שעות ללא שימוש בחומר עזר

ענה על השאלה הראשונה ועל שתי שאלות נוספות

להלן m = מידת לבג.

4 (1) הוכח או הפרך את הטענות הבאות.

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה; $A\subset\mathbb{R}$ מדידה אז גם $f(A)$ מדידה.

(ii) אם $E\subset\mathbb{R}$ מדידה ומקיימת

$$x,y\in E \Rightarrow x+y,\ x-y\in E$$

אז $E=\mathbb{R}$ או $m(E)=0$.

(iii) f מוגדרת על $[0,1]\times[0,1]$ ומקיימת: $f(x,y)$ אינטגרבילית כפונקציה של y לכל x קבוע וכן $\frac{\partial f}{\partial x}$ הינה פונקציה חסומה על הריבוע. אזי $\frac{\partial f}{\partial x}$ מדידה ב-y לכל x ק' ומתקיים:

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy.$$

(iv) אם f_n רציפות על $[0,1]$ ו-$f_n(x)\to f(x)$ לכל נקודה בקטע אזי $f(x)$ אינטגרבילית רימן.

(2) 3 נסה להוכיח את משפט Egorov

(3) 3 הגדר אינטגרביליות במידה שווה של סדרת פונקציות $\{f_n\}$ והוכח כי אם $\{g_n\}$ אינטגרביליות במידה שווה. $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות ! $|f_n| \le |g_n|$ אז גם $\{f_n\}$ אינטגרביליות במידה שווה.

(4) 3 נסה להוכיח את למת הכיסוי של ויטלי.

6.9.89 (116)

מבחן בפונקציות ממשיות (מועד ב')

ענה על השאלה הראשונה ועל שתי שאלות נוספות. משך הבחינה 4 שעות, ללא שימוש בחומר עזר.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$E \subset [0,1]$ היא מדידה אמ"ם

$$|A|_e = |A\cap E|_e + |A\setminus E|_e$$

לכל קבוצה $A\subset[0,1]$ (ולאו דווקא למדידות) או שלכל קבוצה $A\subset[0,1]$ קיימת קבוצה G_δ H כך ש $A\subset H$ ו $|A|_e=|H|_e$.)

אם $A\subset[0,1]$ בעלת מידה אפס אז גם $\{x^2 ; x\in A\}$ בעלת מידה אפס.

אם בונים קבוצת קנטור מוכללת בכל שלב זורקים את השליש באמצעי של כל קטע את ה $\frac{1}{5}$ האמצעי, מקבלים קבוצה בעלת מידה לא חיובית.

אם $A\subset[0,1]$ מדידה ובעלת מידה חיובית אזי הקבוצה

$$D=\{z : z=x-y\ ,\ x,y\in A\}$$

(2) הוכח שקיימת קבוצה לא מדידה חלקית ל-[0,1].

(3) הוכח את הטענות הבאות

א. פונקציה חסומה על [0,1] הינה אינטגרבילית רימן אמ"מ הינה רציפה כמעט תמיד על [0,1].

ב. אם f חסומה ואינטגרבילית רימן על [0,1] אזי f אינטגרבילית לבג והאינטגרלים שווים.

(4) (i) הגדרה כיסוי ויטלי של קבוצה $A \subset \mathbb{R}$

(ii) הוכח את למת הכיסוי של ויטלי

(iii) הוכח כי אם f חסומה ומדידה על $\mathbb{R}$ אזי הפונקציה

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

גזירה כמעט תמיד וקיים $\varphi'(x) = f(x)$ כ.ת.

מבחן בפונקציות ממשיות (יולי גלצמן)

ענה על השאלה הראשונה ועל שתי שאלות נוספות.
משך הבחינה 4 שעות, ללא שימוש בחומר עזר..

(1) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(i) אם $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות מדידות וחסומות המקיימות.

$$\forall\varepsilon \qquad m\{x\in[0,1] : |f_n(x)|\geq\varepsilon\}\to 0$$

אזי $m\{x\in[0,1] : f_n(x)\to 1\}=0$.

(ii) קיימת קבוצה דלילה $A\subset[0,1]$ (כלומר הפנים של $\bar{A}$ הוא ריק) כך ש $m_e(A)=1$.

(iii) אם $\mathbb{R}\supset E_n$! $E_n\nearrow E$ אזי

$\lim m_e(E_n)=m_e(E)$.

(iv) אם $E\subset\mathbb{R}$ מדידה ומקיימת

$$x,y\in E \Rightarrow x+y\,,\,x-y\in E$$

אזי $E=\mathbb{R}$ או $m(E)=0$.

(2) (i) נסח והוכח את משפט אגורוב.

(ii) הראה כי אם E מדידה $m(E)<\infty$! $f_k \xrightarrow{\text{כ.ת.}} f$
על E סדרת פונקציות מדידות אזי $f_k \xrightarrow{\text{במידה}} f$.

(iii) אם E מדידה ! $f_k \xrightarrow{\text{במידה}} f$ סדרת פונקציות מדידות אזי קיימת תת-סדרה המתכנסת כ.ת. על E.

(3) (i) הגדר כיסוי ויטלי של קב' $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) הוכח את למת הכיסוי של ויטלי.

(iii) הוכח כי אם f חסומה ומדידה על $\mathbb{R}$ אזי הפונקציה

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

גזירה כ.ת. וקיים $\varphi'(x)=f(x)$ כ.ת.

(4) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה צורה

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |f|^n\,dm\right)^{\frac{1}{n}}=M<\infty$$

(i) הוכח כי $|f(x)|\le M$ כ.ת. על $[0,1]$

(ii) אלו התנאים על f כדי"ל כך שהסדרה $\{f^n : n=1,2,\dots\}$ תהיה אינטגרבילית במידה שוה?