23/1/92

פונקציות ממשיות : מבחן , מועד א , סמ' א , תשנ'ב

מורה: י .אהרונסון

זמן המבחן: שלוש שעות.
הנחיות: ענה על שאלה מס. 1 ועל שלוש שאלות נוספות ללא שימוש בכל חומר עזר.

1. (40 נק') הוכח או הפרך את ה טענות הבאות:

a) אם A תת-קבוצה מדידה של $(0,1)$ ו- $\mu(A\cap J) > \frac{1}{2}|J|$ לכל תת-קטע J של $(0,1)$, אזי $\mu(A) > 3/4$.

b) כל פונקציה מדידה, חסומה על $(0,1)$ הינה גבול במ"ש של פונקציות פשוטות.

c) אם U תת-קבוצה פתוחה של $(0,1)$, שהיא צפופה ב- $(0,1)$, אזי $\mu(U)=1$.

d) אם $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq (0,1)$, אזי

$\bar{\mu}(A_n) \to \bar{\mu}(\cup_{n\ge 1} A_n)$ כאשר $n \to \infty$.

2. (20 נק') יהיה (X,B,m) מרחב הסתברות, ותהינה $f_n:X\to R$ פונקציות מדידות.
a) הוכח כי אם $\limsup_{n\to\infty} f_n \le M$ כ"ת, אזי לכל $\delta>0$ קיים $A\in B$, $m(A)>1-\delta$ ו- n_0, כך שלכל $n\ge n_0$, $x\in A$: $f_n(x)<M+\delta$.

b) האם

$$\int_X |f_n|\,dm \to 0$$ גוררת $f_n \to 0$ כ"ת ?

3. (20 נק') יהיה $L^p([a,b])$ $(1\le p<\infty)$. הוכח כי

a) $x^p\mu([|f|\ge x]) \to 0$ כאשר $x\to\infty$.

b) לכל $\delta>0$ קיים $g\in C([a,b])$ כך ש- $\|f-g\|_p<\delta$.

4. (20 נק')
a) נסח והוכח את משפט הכיסוי של Vitali.
b) הוכח כי אם $f:[a,b]\to R$ מונוטונית, אזי f גזירה בכמעט כל נקודה של $[a,b]$.

5. (20 נק') יהיה (X,B,m) מרחב מידה σ-סופית, ותהינה $f,g,h:X\to R$ פונקציות מדידות. הוכח כי

$$\|fgh\|_5 \le \|f\|_{10}\|g\|_{15}\|h\|_{30}.$$

מתי מתקיים שיוויון? (המסתמך על אי-שוויון Holder מתבקש להוכיחו).

בהצלחה!

S1

19.6.88

פונקציות ממשיות

מבחן מעבר מועד א' סמ' ב' תשמ"ח

משך המבחן: שלוש שעות

הנחיות: ענה על שאלה מס' 1 ועוד שלוש שאלות ללא שימוש בכל חומר עזר.

1. א) המידה החיצונית של $A\subseteq\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| : A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n ,\ \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ קטעים}\right\}$$ כאשר

$|I|$ מסמן את האורך של הקטע I.

הוכח כי אם $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ קטעים זרים אז $\mu^*(U)=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$.

ב) פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת מדידה אם לכל $x\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty,x)$ קבוצה מדידה.

(i) הוכח כי אם $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות אז fg פונקציה מדידה

(ii) הוכח כי אם $f_n:\mathbb{R}\to[0,1]$ פונקציות מדידות

3. עבור $x\in\mathbb{R}$ נגדיר $f_x:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ע"י $f_x(t)=t^{x-1}e^{-t}$

(i) הוכח כי f_x אינטגרבילית על $(0,\infty)$

עבור $0<x$.

נגדיר $\Gamma(x)=\int_0^\infty f_x(t)\,dt$ עבור $0<x$.

(ii) הוכח כי לכל $0<x$: —

$$n^x\int_0^1(1-y)^n y^{x-1}\,dy$$
$$=\int_0^n\left(1-\frac{y}{n}\right)^n y^{x-1}\,dy$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\Gamma(x)$$

(iii) הוכח כי Γ גזירה ברציפות

על $(0,\infty)$.

2. יהיה $I=[0,1]$, μ מידת Lebesgue על I, $f_n:I\to\mathbb{R}$

$(n\geq 1)$ מוגדרות ע"י

$f_{2^n+k}=2^n 1_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)}$ כאשר $0\leq n$, $0\leq k\leq 2^n-1$

א) הוכח כי $f_n\xrightarrow{\mu}0$, אבל f_n אינו שואף

ל-0 כ"ת על I.

ב) האם $\frac{1}{n}\sum_{k}^{n}f_k\xrightarrow{\mu}0$ על I ?

יהיה $(X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מידה σ-סופי.

א) הוכח כי $\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$ עבור $f\in L^p$, $g\in L^q$, $p,q,r\in(1,\infty)$ כך ש $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$.

מתי יש שוויון?

ב) הוכח כי אם $p\in[1,\infty)$, $f\in L^p$ אז:

$x^p\mu([|f|\ge x]) \longrightarrow 0$ כאשר $x\to\infty$.

4. יהיה $(X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מידה, $\mu(X)=1$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq \mathcal{B}$ כך ש $\mu(A_m\cap A_n)=\mu(A_m)\mu(A_n)$ עבור $m\neq n$. הוכח כי

א) אם $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$ אזי $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)=0$

ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\infty$ אזי $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)=1$

5. יהיה μ מידת Lebesgue על $\mathbb{R}$. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. נגדיר $\nu:\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ ע"י

$$\nu(A)=\int_A f\,d\mu.$$

א) הוכח כי ν היא σ-אדיטיבית

ב) הוכח כי $\nu(A)\to 0$ כאשר $\mu(A)\to 0$

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

אוניברסיטת תל -אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א', סמסטר א', תשמ"ח
9.2.88

פונקציות ממשיות
מבחן מעבר לתלמידי מתמטיקה שנה ב' -ג'
המורה : דר' י. אהרונסון

משך המבחן : שלוש שעות.
הנחיות: ענה על שאלה מס' 1 ועוד שלוש שאלות ללא שימוש בכל חומר עזר.

1. א. המידה החיצונית של $A\subseteq\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| : A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\ \text{קטעים}\ \{I_n\}\right\}$$

(כאן $|I|$ מסמן האורך של הקטע I).

הוכח כי :

(i) $\mu^*(I)=|I|$ כאשר I קטע.

(ii) $\mu^*(A)\leq\mu^*(A\cap B)+\mu^*(A\setminus B)$ כאשר $A,B\subseteq\mathbb{R}$

(iii) $\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap I)+\mu^*(A\setminus I)$ כאשר $A\subseteq\mathbb{R}$, I קטע.

(iv) $\mu^*(A\cap B)+\mu^*(A\cup B)\leq\mu^*(A)+\mu^*(B)$ כאשר $A,B\subseteq\mathbb{R}$

ב. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת מדידה אם $f^{-1}(-\infty,x)$ קבוצה מדידה לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכח כי :

(i) אם $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות אזי גם $f+g$ פונקציה מדידה.

(ii) אם $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה ולכל $x\in\mathbb{R}$
$f_n(x)\to f(x)$ כאשר $n\to\infty$,
אזי $x\mapsto f(x)$ היא פונקציה מדידה.

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

1. פונקציה מדידה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת פשוטה אם $f(\mathbb{R})$ קבוצה סופית. אם $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מדידה בעלת מידה סופית, האנטגרל של הפונקציה הפשוטה f על A מוגדר ע"י

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{y\in f(\mathbb{R})} y\,\mu(\{x: f(x)=y\}\cap A)$$

הוכח כי:

(i) אם $f=\sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}$ כאשר $a_k\in\mathbb{R}$; $A_k\subseteq\mathbb{R}$ קב' מדידה $(1\le k\le n)$ אזי f פונקציה פשוטה ו-

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k\,\mu(A_k\cap A)$$

(ii) אם f_n $(n\ge 1)$ פונקציות פשוטות שמתכנסות לפונקציה חסומה, במידה שווה על קבוצה מדידה A בעלת מידה סופית, אזי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu$

2. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(i) אם $A_n\subseteq[0,1]$, $A_n\supseteq A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\phi$ אזי $\mu^*(A_n)\downarrow 0$

(ii) אם $B_n\subseteq[0,1]$, $B_n\subseteq B_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=[0,1]$ אזי $\mu^*(B_n)\uparrow 1$

3. (i) נניח כי $A_n\subseteq[0,1]$ $(n\ge 1)$ קבוצות כך ש- $\sum\mu^*(A_n)<\infty$. הוכח כי $\mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)=0$.

(ii) הוכח כי לכמעט כל $x\in(0,1)$ קיים $q_0(x)$ כך ש $\left|x-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{q^2(\log q)^2}$ עבור $p,q\in\mathbb{N}$; $q\ge q_0(x)$.

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

(i) הוכח כי אם $f_n, f:(0,1)\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות
כך ש: $\sup_n \int |f_n|^2 d\mu \le M$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ על $(0,1)$
אזי $\int_{(0,1)} |f_n - f|\, d\mu \longrightarrow 0$ כאשר $n\to\infty$.

(ii) הוכח כי $f_n \xrightarrow{\mu} f$ על $(0,1)$ איננה גוררת
כי $f_n \to f$ כ"ת על $(0,1)$.

5. (i) הוכח כי $\int |fgh|\, d\mu \le \|f\|_2 \|g\|_3 \|h\|_6$ עבור $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
פונקציות מדידות.

(ii) הוכח כי אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על $[0,1]$ אזי

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,dx = 0$$

בהצלחה!!!

14.9.88

פונקציות ממשיות, השלמת סמ' ב

מבחן מעבר מועד ב מורה + אהרונסון

משך המבחן: 3 שעות

הנחיות: ענה על שאלה מס' 1 ועל עוד שלוש שאלות בלבד ללא שימוש בכל חומר עזר.

1) א) המידה החיצונית של $A\subseteq\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| : A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\ \{I_n\}_n^{\infty} \text{ קטעים}\right\}$$ כאשר

$|I|$ מסמן את האורך של הקטע I.

(i) האם יש קבוצה פתוחה $U\subseteq(0,1)$ כך ש- $\bar{u}=[0,1]$, $\mu^*(U)<\frac{1}{16}$?

(ii) האם יש קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל קטע $I\subseteq\mathbb{R}$: $\mu^*(A\cap I)=\frac{99}{100}|I|$?

ב) יהיה $(X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מידה סופית.

הוכח כי אם $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, $B,A_1,\dots,A_n\in\mathcal{B}$ כך ש-

$\sum_{k=1}^{n}a_k 1_{A_k}(x)\geq 0$ לכל $x\in B$, אזי

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\mu(A_k\cap B)\geq 0$$

ג) הוכח כי אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה אזי קיימת פונקציה רציפה $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך ש

$$\mu\left(\left\{x\in[0,1] : |f(x)-g(x)|>\frac{1}{8}\right\}\right)<\frac{1}{8}$$

2) (i) הוכח או הפרך:

אם $A_n \subseteq [0,1]$, $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ אזי $\mu^*(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii) הוכח כי אם $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \ge 1$) פונקציות מדידות כך ש- $\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \le 1$ כ"ת $x \in [0,1]$, אזי קיימת קבוצה מדידה A כך ש- $\mu(A) > 3/4$ וקיים $N \ge 1$ כך שלכל $x \in A$, $n \ge N$, $f_n(x) \le 3/2$.

(מסתמכים על משפט Egorov מתבקשים להוכיח אותו)

3) (i) הוכח או הפרך:

אם $A_n \subseteq [0,1]$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$ אזי $\mu^*(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

(ii) האם יש σ-אלגברה אינסופית בת-מניה?

4) הוכח כי אם $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות המקיימות (a) $\sup_n \int_{[0,1]} f_n^2 < \infty$ (b) $\int_{[0,1]} f_m f_n = 0$ עבור $m \ne n$

אזי $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ כ"ת על $[0,1]$.

5) (i) הוכח כי אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית על $\mathbb{R}$, אזי הפונקציה $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(yx) f(x)}{1+x^2} dx$ הינה גזירה ברציפות על $\mathbb{R}$.

(ii) הוכח כי אם $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה , $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות אזי

$$\|fgh\|_5 \le \|f\|_{10} \|g\|_{15} \|h\|_{30}$$

בהצלחה!