

מבחן באלגברה ב' I

זמן

אין להשתמש בחמד עוד כלשהו.  
הזמן המוקצב: ארבע שעות.

ענה על ארבע שאלות (בלבד!) מתוך שש השאלות הבאות.

שאלה 1

הוכח שבליחבורת סילו- $p$  של חבורה סופית צמודות זו לזו.

שאלה 2

תהי  $N$  חבורה חלקית נורמלית של חבורה  $G$ .

(א) הגודר פעולה על  $G/N = \{gN : g \in G\}$  והוכח ש- $G/N$  חבורה תחת פעולה זו.

(ב) הוכח שכל חבורה חלקית נורמלית של  $G/N$  היא מהצורה  $\{hN : h \in H\}$  עבור איזה חבורה חלקית

נורמלית  $H$  של  $G$ .

שאלה 3

תהי  $G$  חבורת- $p$  ותהי  $N \neq 1$  חבורה חלקית נורמלית של  $G$ . הראה כי

(א)  $G$  פועלת על  $N$  על ידי ההצמדה וכי תחת פעולה זו מתקיים לכל  $n \in N$  :

(n) הוא מסולל- $G$  (בעל אורך 1) אם ורק אם  $n \in Z(G)$ .

(ב) כל מסולל- $G$  הם בעלי אורך  $p^i$ , באשר  $i \geq 0$ .

(ג)  $N \cap Z(G) \neq 1$ .

(ד) תן זוגמה לחבורה סופית  $G$  (לאו זקא חבורת- $p$ ) ו- $N < G$  כך ש- $Z(N) \not\subseteq Z(G)$ .

שאלה 4

תהי  $G$  חבורה מסודר אי זוגי ותהי  $H \leq G$  כך ש  $(G:H) = 3$ . הוכח שאם  $g \in G$  מקיים  $g^2 \in H$  אז  $g \in H$ .

שאלה 5

(א) הוכח שכל חבורה מסודר 91 היא מעגלית.

(ב) תן זוגמה לחבורה לא חילופית מסודר 21.

שאלה 6

הראה שאין חבורה פשוטה מסודר 700.

אלגברה ב' ו'  
ד"ר דן הרן

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.  
הזמן המוקצב: שלוש וחצי שעות.  
ענה על 5 שאלות. (ערך כל תשובה נכונה הוא 20 נקודות.)

1. תהי  $G$  חבורה סופית מסדר אי זוגי ותהי  $H$  חבורה חלקית שלה כך ש-  $(G:H)=3$ .
  - (א) הוכח: אם  $a \in G \setminus H$  אז  $G$  היא איחוד זר של  $H, aH, a^2H$ .
  - (ב) יהי  $H \setminus G = \{g, h\}$  ונסמן  $hg = g^{-1}a$ . הוכח:
 
$$g^{-1} \notin aH, g^{-1} \notin a^2H$$
  - (ג) הסק כי  $H \triangleleft G$ .
2. הוכח את המשפט: אם  $r$  הוא המספר של חבורות סילו- $p$  של חבורה סופית  $G$  אז  $r-1$  מתחלק ב- $p$ .
3. (א) כמה חבורות צמודות יש לחבורת סילו-2 של  $A_5$  בתוך  $A_5$ ?  
(ב) הוכח שכל חבורה חלקית מסדר 8 של  $S_4$  מכילה חבורה חלקית איזומורפית לחבורת קליין.
4. תהי  $H$  חבורה חלקית ממעל של חבורה סופית  $G$  ( $H \not\triangleleft G$ ). הוכח:  $\cup_{g \in G} gHg^{-1} = G$ .
5. תאר את כל החבורות מסדר 121.
6. מהי חבורת האוטומורפיזמים  $\text{Aut}(K)$  של חבורת קליין  $K$ ? מאיזה סדר היא ולאיזה חבורה מוכרת היא איזומורפית?
7. יהי  $F$  שדה סופי. הוכח ש-  $F^X$  חבורה מעגלית.

בהצלחה

אלגברה ב' 1  
ד"ר דן הרן

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.  
הזמן המוקצב: שלוש וחצי שעות.  
ענה על 5 שאלות. (ערך כל חשובה נכונה הוא 20 נקודות).

1. (א) בנה שדה  $E$  בן 27 אברים, כלומר: הצג קבוצה  $E$  בת 27 אברים והגדר פעולות עליה כך שהיא תהיה השדה המבוקש.  
 (ב) הוכח שאם  $\alpha \in E$  ו- $\alpha \neq 0, 1, -1$ , אז כל אבר של  $E$  ניתן להיכתב בצורה  $\alpha^2 + c\alpha + b + \alpha$ , כאשר  $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ .  
 (ג) הוכח את המשפט: כל שתי חבורות סילו- $q$  של אותה חבורה סופית  $G$  צמודות זו לזו ב- $G$ .
3. תהי  $G$  חבורה מסדר  $q^k$ , כאשר  $q < k$  שני מספרים ראשוניים. הוכח:
  - (א)  $G$  פתירה.
  - (ב) אם  $q$  אינו מחלק את  $q-1$  אז  $G$  מעגלית.
  - (ג) אם  $q$  מחלק את  $q-1$  אז קיימת חבורה לא חילופית מסדר  $q^k$ .
4. (א) יהי  $q$  ראשוני ותהי  $A = \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}$ , ותהי  $B \leq A$  כך ש- $B$  איזומורפית ל- $\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}$ . נניח כי  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$  ו- $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k$ . הוכח ש- $n_1 = m_1$ .  
 (ב) מצא את כל החבורות החילופיות מסדר 108, עד כדי איזומורפיזם.
5. (א) הוכח שכל חבורת- $q$  היא פתירה.  
 (ב) כמה חבורות סילו- $q$  יש לחבורה הסימטרית  $S_p$ , כאשר  $q$  ראשוני? נמקן.
6. הוכח: אם  $G$  חבורה סופית ו- $A, B \leq G$  כך ש- $A \cap B = \{1\}$  אז  $|AB| = |A| \cdot |B|$ .  
 .. יהי  $F$  שדה סופי. הוכח ש- $F^X$  חבורה מעגלית.

בהצלחה

אלגברה ב' 1  
ד"ר דן הרן

ה. על 4 שאלות.  
מן המוקצב: שלוש וחצי שעות.

(א) נסח והוכח את משפט Cayley.  
(ב) תהי  $G$  חבורה לא חלופית. הוכח כי  $G/Z(G)$  אינה מעגלית.

(א) הוכח שהמרכז של חבורת- $p$  לא טריביאלית אינו טריביאלי.  
(ב) הוכח שכל חבורה מסדר 15 היא מעגלית.

(א) הוכח: אם  $G$  חבורת- $p$  סופית או כל חבורה חלקית מרבית (=מקסימלית) שלה היא נורמלית ובעלת אינדקס  $p$ .

(ב) תהי  $A$  חבורה סופית, שיש לה בדיוק 3 חבורות חלקיות לא טריביאליות, ושלושתן מסדר 2. הוכח ש- $A$  איזומורפית לחבורת קליין.

(ג) יהי  $p$  ראשוני ותהי  $A = Z/p^1 \oplus Z/p^2 \oplus \dots \oplus Z/p^n$ , ותהי  $B \leq A$  כך ש- $B$

איזומורפית ל- $Z/p^1 \oplus Z/p^2 \oplus \dots \oplus Z/p^m$  הוכח ש- $k$ .

(ב) תהי  $G$  חבורה חלופית סופית ויהי  $m$  המספר הטבעי הקטן ביותר כך ש- $g^m = 1$  לכל  $g \in G$ . הוכח שיש אבר מסדר  $m$  ב- $G$ .

(א) הוכח ש- $A_n$  נוצרת על ידי חישוקים מאורך 3.

(ב) הוכח כי  $A_n$  היא חבורת הקומוטטור של  $S_n$ .

(א) יהי  $p$  ראשוני ותהי  $G$  חבורה סופית. הגדר: חבורת סילו- $p$  של  $G$ . הוכח את קיומה.

(מותר לך להניח את קיומה אם  $G$  חלופית).

(ב) הוכח שכל חבורה מסדר 1001 היא מעגלית. ( $1001 = 7 \times 11 \times 13$ ).

צלחהו