פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שנירבק)

כמה שורשים יש למשוואה $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2=\frac{1}{8}$?

כמה מהם חיוביים? האם יש שורש x_0 ש- $|x_0|>1$?

פתרון

נגדיר פונקציה $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2-\frac{1}{8}$

למשוואה יש שורשים בדיוק בנקודות שבהן $g(x)$ מתאפסת. $g(x)$ רציפה וגזירה. מתקיים:

$$g'(x)=x^3-2x^2+2x=x(x^2-2x+2)=x((x-1)^2+1)$$

מכיוון ש $(x-1)^2+1$ תמיד חיובי, אז הפונקציה מונוטונית עולה עבור $x>0$ ומונוטונית יורדת עבור $x<0$. לכן הפונקציה מתאפסת לכל היותר בנקודה חיובית אחת ולכל היותר נקודה שלילית אחת.

מתקיים $g(0)<0$, $g(1)>0$, $g(-1)>0$.

לכן לפונקציה יש ערכי ביניים $0<x_1<1$, $-1<x_2<0$ שעבורם $g(x_1)=0$, $g(x_2)=0$.

לכן אין שורשים ימינה ל 1 ושמאלה ל -1.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

תהי f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) $(0<a<b)$ המקיימת $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{f(b)}{f(a)}$ הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)=-\frac{c}{2}f'(c)$.

פתרון

נגדיר בקטע $[a,b]$ פונקציה $g(x)=x^2\cdot f(x)$.

הפונקציה g היא רציפה וגזירה בקטע הפתוח (כמכפלה של פונקציות רציפות וגזירות).

על-פי הנתון מתקיים $g(a)=g(b)$.

על-פי משפט רול (או לגרנז') קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $g'(c)=0$. מתקיים $g'(x)=2\cdot x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)$.

מכיוון ש $c>0$ אז לנקודה c מתקיים $2f(c)=-c\cdot f'(c)$ ומתקיימת הדרישה.

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

חשבו את האינטגרל (אם קיים)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$$

פתרון:

נציב $t=\cos x$, $dt=-\sin x\cdot dx$

$x=0\Longrightarrow t=1$, $x=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow t=0$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx=-\int_1^0\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}=\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\,dt=3t^{\frac{1}{3}}\Big]_0^1=3$$

שלומי

שאלה: (מבחינה של פרופ' שגרדק)

נתונה פונקציה רציפה גזירה שלילית לכל x.
הוכיחו: x_0 נקודת קיצון מקומי של $f(x)$ אם ורק אם x_0 נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)=\int^x f^2(t)dt$
האם ל- $g(x)$ נקודת קיצון מקומי או מוחלט?

פתרון:

מכיון ש $f(x)$ רציפה אז $g(x)$ רציפה וגזירה לכל x ומתקיים $g'(x)=f^2(x)$, מכיון ש $f(x)$ גזירה אז מתקיים $g''(x)=2f(x)\cdot f'(x)$. בנקודת פיתול של הפונקציה g, הסימן של g'' מתחלף ומכיון ש $f(x)<0$ לכל x אז גם הסימן של f' מתחלף, לכן זו נקודת קיצון מקומי.
בכיוון השני: f' מחליפה סימן בנקודה x_0 אז מכיון ש f תמיד אי שלילית אז גם g'' מחליפה סימן בנקודה x_0 לכן x_0 היא נקודת פיתול.
מכיון ש $g'(x)=f^2(x)$ לכל x אז $g(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה, מתקיים $g(0)=0$ ואין לה נקודות קיצון בתוך התחום.

שאלה: (מבחינה של פרופ' שגרדק)

חשבו $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{3n-3}$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{3n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{5n-3}\right)^{\frac{3n-3}{5n-3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-1}\right)^{\frac{3n-3}{5n-3}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\frac{3}{5}(5n-3)-\frac{2}{5}\cdot 3}{5n-3}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{3}{5}}\cdot e^{\frac{-\frac{6}{5}}{5n-3}}=e^{-\frac{3}{5}}$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)
עבור אילו ערכי a, b תהי הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x-x}{x^3} & x\neq0\\ b & x=0\end{cases}$$

רציפה ב-0 ?

פתרון

צריך להתקיים $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

הפונקציה $\dfrac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x-x}{x^3}$, כאשר $x\to0$,
הגבול של המונה וגם של המכנה הוא 0.
המונה וגם המכנה הם פונקציות גזירות מכל סדר.
לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים.

$$\lim_{x\to0}\frac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{a\cdot\sin x+0.5b\cdot\sin 2x-x}{x^3}=$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to0}\frac{a\cdot\cos x+b\cdot\cos 2x-1}{3x^2}$$

צריך להתקיים $\lim\limits_{x\to0} a\cdot\cos x+b\cdot\cos 2x-1=0$
וזה קורה אם $a+b=1$.
אם זה קורה אז נמשיך להשתמש בכלל של לופיטל
עוד פעם: נקבל שהגבול של המונה הוא:

$$\lim_{x\to0}\frac{-a\cdot\sin x-2b\cdot\sin 2x}{6x}$$

צריך להתקיים שהגבול של המונה כאשר $x\to0$ הוא 0, זה קורה עבור כל a,b קבועים. נשתמש בכלל של לופיטל עוד פעם. הגבול של המונה שווה ל $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-a\cdot\cos x-4b\cdot\cos 2x}{6}$. כדי שהגבול של המונה יהיה 0 צריך להתקיים $a+4b=0$ ועם $a+b=1$, לכן $b=-\frac{1}{3}$, $a=\frac{4}{3}$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה של a וגזירה בנקודה a.
כמו כן $f(a)>0$.
חשבו

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

פתרון

מכיוון ש f גזירה בנקודה a אז מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=f'(a)$$

עבור כל $s>f'(a)$! $0<t<f'(a)$ קיים N טבעי כך שעבור כל $n>N$:

$$t<\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}<s$$

ועבור כל $n>N$ מתקיים

$$\left(1+\frac{t}{n\cdot f(a)}\right)^n=\left(\frac{f(a)+\frac{1}{n}t}{f(a)}\right)^n\le\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n\le$$

$$\le\left(\frac{f(a)+\frac{1}{n}s}{f(a)}\right)^n=\left(1+\frac{s}{n\cdot f(a)}\right)^n$$

לגבי כל $t<f'(a)<s$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n\cdot f(a)}\right)^n=e^{\frac{t}{f(a)}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{s}{n\cdot f(a)}\right)^n=e^{\frac{s}{f(a)}}$$

לכן קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

תהי $f(x)$ רציפה ב $[0,1]$ כך ש $f(x)\in[0,1]$. הוכיחו שעבור כל n טבעי יש למשוואה $x^n=f(x)$ פתרון ב $[0,1]$.

פתרון

עבור n נתון נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)-x^n$.
מתקיים $g(0)=f(0)-0^n\geq 0$, $g(1)=f(1)-1^n\leq 0$.
$g(x)$ רציפה בקטע כהפרש של שתי פונקציות רציפות. לכן עבור כל $g(1)\leq d\leq g(0)$ קיימת נקודה c, $0\leq c\leq 1$ כך ש $g(c)=d$!
בפרט קיימת נקודה c_0 שבה $g(c_0)=0$.
בנקודה זו מתקיים $f(c_0)-c_0^n=0$.
כך ניתן למצוא פתרון כזה עבור כל n נתון.

שאלה (מבחינה של פרופ' סיגשינסקי)

חשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}\,dt$

פתרון

ננסה את מזלנו ונבדוק אם קיים הגבול ל $f(t)=(\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}$ כאשר $t\to 0$. נחשב את הגבול של $\ln f(t)$.

$$\lim_{t\to 0}\ln\left((\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t+\sin t)}{t}$$

המונה והמכנה שואפים ל 0 כאשר $t\to 0$. שניהם גזירים בסביבת $t=0$ לכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos(t)+\sin(t))}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin(t)+\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}}{1}=1$$

לכן $\lim_{t\to 0} f(t)=e$. עבור כל $a>e$, $e>b$ מתקיים

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x b\,dt\leq \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x a\,dt=a$$

לכן הגבול הוא e.

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' אדמוניק ופרופ' סטשינסקי)

חשב $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$

<u>פתרון</u>

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

הוא סכום של n מחוברים שכל אחד מהם

הוא קטן מ $\sqrt{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}$ וגדול מ $\frac{1}{n+0.5}$

(הצדקה קריקע: $(n+0.5)^2=n^2+n+0.25>n^2+n$)

לכן $\frac{n}{n+0.5}<a_n<\frac{n}{n}$

מכיון שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$ וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+0.5}=1$

אז קיים $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' אברמוביץ' ופרופ' סיקסינסקי')

חשב $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

<u>פתרון</u>

נחשב $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)$

אם קיים לביטוי זה גבול אז לפי אריתמטיקה של גבולות נוכל למצוא את הגבול המבוקש.

$$\lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$$

מתקיים $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ וגם $\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos x=0$

שתי הפונקציות הן גזירות מכל סדר בסביבה של הנקודה $x=0$. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים עד שהמונה או המכנה יתאפס.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2}=-\frac{1}{2}$$

לכן מתקיים $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-0.5}$

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' גלוסקין ופרופ' סודשינסקי)

הוכח כי אם $a_0, a_1, \dots, a_p$ מקיימים $a_0+a_1+\dots+a_p=0$ אז

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\dots+a_p\sqrt{n+p}\right)=0$$

פתרון

שים לב שעבור כל $k\ge 1$ מתקיים $\sqrt{n+k}<\sqrt{n}+\frac{k}{\sqrt{n}}$ (ההוכחה באמצעות העלאת שני האגפים בריבוע). לכן:

$$a_0\cdot\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\dots+a_p\cdot\sqrt{n+p}<$$

$$<a_0\cdot\sqrt{n}+a_1\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\dots+a_p\cdot\left(\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left[a_0\sqrt{n}+a_1\cdot\sqrt{n}+\dots+a_p\cdot\sqrt{n}\right]+$$

$$+a_1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+a_2\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}+\dots+a_p\cdot\frac{p}{\sqrt{n}}$$

עפ"י הנתון הסוגריים המרובעים מסתכמים ב 0. סכום יתר האיברים הוא לא יותר מ: $\frac{\sum_{i=0}^{p} a_i\cdot p}{\sqrt{n}}$.

מכיוון ש a_i ו p הם קבועים אז מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum a_i\cdot p}{n}=0$ והגבול הוא 0 כנדרש.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אברמוביץ' ופרופ' סוכשינסקי)

הוכח או הפרך את הטענה הבאה: אם עבור כל x ממשי מתקיים האי שוויון $f(x)<g(x)$ והפונקציות f ו-g גזירות אזי מתקיים אי השוויון $f'(x)<g'(x)$

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.

נגדיר $f(x)=1-\frac{1}{1+x^2}$ עבור $-\infty<x<+\infty$

$g(x)=1$ עבור $-\infty<x<+\infty$

עבור כל $-\infty<x<+\infty$ מתקיים $f(x)<1$. שתי הפונקציות הן גזירות בכל נקודה על הישר.

מתקיים $g'(x)=0$ עבור כל $-\infty<x<+\infty$

אך $f(x)$ היא פונקציה גזירה עולה עבור $0<x$

ולכן עבור כל $0<x$ מתקיים $0<f'(x)$.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' סודין)

חשב $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}}$

<u>פתרון</u>

עבור כל k קבוע

$$\frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}} = \frac{2^k\left(1+\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)}{2^k\left(2+\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3\right)}$$

עבור כל k טבעי קבוע ביטוי זה גדול מ

$$\frac{\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}\right)^k}{\frac{2}{3}\cdot 3+\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

וקטן מ

$$\frac{1+\left(\frac{3}{2}\right)^k}{\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3}$$

לביטוי זה יש גבול $\frac{1}{3}$ כאשר $k\to\infty$. לכן לפי משפט הסנדוויץ' הגבול הוא $\frac{1}{3}$.

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' סודין)

חשב $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^k+3^k}$

<u>פתרון</u>

עבור כל k קבוע

$$3=\sqrt[k]{3^k}<\sqrt[k]{2^k+3^k}<\sqrt[k]{2\cdot 3^k}=\sqrt[k]{2}\cdot 3$$

כאשר k שואף לאינסוף שני האגפים שואפים ל 3.
לכן לפי משפט הסנדוויץ' הגבול הוא 3.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' פיבשינסקי)

מצא $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3}+x$

פתרון

עבור כל $x<0$ מתקיים $\sqrt[3]{1-x^3} > -x$

ולכן עבור כל $x<0$ $\sqrt[3]{1-x^3}+x > 0$

עבור למשל כל $x<-8$ מתקיים $\sqrt[3]{1-x^3} < -x-\frac{1}{x}$

(הבהרה: אם מעלים את שני האגפים שהם חיוביים בשלישית אז רואים זאת)

לכן מתקיים עבור כל $x<-8$

$$-\frac{1}{x} > \sqrt[3]{1-x^3}+x > 0$$

מכיוון שכאשר $x\to-\infty$ שני האגפים שואפים ל 0, אז לפי משפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול הוא 0.

שאלה (מבחינה של פרופ' פיבשינסקי)

הוכח כי למשוואה $(a,b>0)$ $y=x^5+ax^3+b$ שורש ממשי יחיד.

פתרון

מתקיים $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5+ax^3+b=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5+ax^3+b=-\infty$

והפונקציה היא רציפה. לכן קיימת נקודת ביניים בה היא מתאפסת.

מתקיים $y'=5x^4+3ax^2 > 0$ לכל x. לכן הפונקציה לא יכולה להתאפס ביותר מנקודה אחת.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' לוין ופרופ' סודין באינפי' לפיסיקאים)

מצא את סימן האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

<u>פתרון</u>

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin(2\pi - x)}{2\pi - x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi - x}\right) dx$$

בכל נקודה $\pi \geq x \geq 0$ מתקיים $\sin x \geq 0$ ובכל נקודה $\pi > x \geq 0$ מתקיים $\frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi - x} > 0$ כאשר $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi - \pi} = 0$. לכן זהו אינטגרל של פונקציה אי שלילית שהיא חיובית ממש בקטע שלם, לכן האינטגרל הוא חיובי.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' גלעזר ופרופ' שז'רביק)

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{6}$ כאשר

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

(רמז: אינטגרל מסוים)

פתרון

מת-ק"ב

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2-k^2}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

ביטוי זה הינו סכום חלוקה תחתון של האינטגרל $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ כאן גודל קטעי החלוקה שואף לאפס,

לכן הגבול הוא האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

נציב $t = \frac{x}{2}$, $dt = \frac{dx}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \int_0^{0.5} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big]_0^{0.5} = \frac{\pi}{6}$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סיבשינסקי)

הוכח כי אם $a_1+\frac{1}{2}a_2+\dots+\frac{1}{n}a_n=0$ אזי למשוואה $a_1+a_2x+\dots+a_n x^{n-1}=0$ יש שורש בקטע $0\le x\le 1$.

פתרון

נסתכל על הפונקציה $f(x)=a_1+a_2x+\dots+a_n x^{n-1}$.
זו פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$. לכן היא מקבלת בקטע ערך מכסימלי בנקודה x_1 וערך מינימלי בנקודה x_2.

הפונקציה רציפה בקטע סגור, זו פונקציה אינטגרבילית.
אילו היה מתקיים $f(x_1)<0$ אזי היה מתקיים

$$\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 f(x_1)\,dx = f(x_1)<0$$

אך נתון $\int_0^1 f(x)\,dx = a_1+\frac{1}{2}a_2+\dots+\frac{1}{n}a_n=0$

לכן $f(x_1)\ge 0$. משיקולים דומים נקבל $f(x_2)\le 0$.

לכן מכיון שהפונקציה רציפה אז קיימת בקטע הסגור שבין x_1 ל x_2 נקודה x_3 שבה $f(x_3)=0$.

שלומי

שאלה
חשבון (מבחינה של פרופ' סלכן)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$$

פתרון

הפונקציות $e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x$ ו- $\sin^2 x$ שואפות ל- 0 כאשר $x\to 0$! הן גזירות מכל סדר ולכן נוכל להפעיל את כלל לופיטל מספר פעמים עד שהמונה או המכנה לא יתאפסו בנקודה 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}-\sin x-x\cos x+\sin x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}-x\cdot\cos x}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}-\cos x+x\cdot\sin x}{2\cdot\cos 2x}=$$

$$=\frac{2\cdot e^0-\cos 0}{2\cdot\cos 0}=0.5$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח או הפרך.

יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון שעבור כל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי N כך שעבור כל מספר טבעי $n>N$ מתקיים $|x_n-y_n|<\varepsilon$

אזי קיים מספר $a\in\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=a$.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.
נגדיר שתי סדרות: לכל n $x_n=y_n=n$
כך לכל n $|x_n-y_n|=0$ אך קיים $\lim x_n=\infty$.
אם נרצה שגם לא תהיה התכנסות ל ∞
אז נבחר סדרות אחרות: $x_n=y_n=(-1)^n\cdot n$.
במקרה זה גם $|x_n-y_n|=0$ אך לא קיים גבול לסדרות וגם אין גבול $+\infty$ או $-\infty$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח שלמשוואה $x^2 = x\sin x + \cos x$ יש בדיוק שני שורשים ב-R.

פתרון

נגדיר פונקציה $g(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$

$g(x)$ היא פונקציה רציפה וגזירה ב-R כסכום של פונקציות רציפות וגזירות.

$$g'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = 2x - x\cos x = x(2-\cos x)$$

$2-\cos x$ תמיד גדול מ-0. לכן $g'(x)<0$ עבור $x<0$; $g'(x)>0$ עבור $x>0$.

מתקיים: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$g(0)<0$

מכיון שהפונקציה רציפה עבור $x<0$ ומכיון ש... הפעל ערך ביניים אז קיימת נקודה $c<0$ כך ש $\infty > g(c) = 0 > g(0)$. מכיון ש-g בעל נגזרת שלילית עבור $x<0$ אז עבור $c_1<c_2<0$ מתקיים $g(c_1) > g(c_2)$; $g(c_2) = g(c_1) + (c_2-c_1)\cdot g'(c_3)$ כאשר c_3 איזשהי נקודה המקיימת $c_1 \le c_3 \le c_2$. לכן יש רק נקודה יחידה c : $c<0$ שבה $g(c)=0$, בנקודה שבה g מתאפסת ורק בנקודה כזאת יש פתרון למשוואה.

משיקולים דומים נקבל שקיים גם רק פתרון חיובי אחד.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח/י או הפרך/י: פונקציה חסומה ב- $[a,b]$ היא אינטגרבילית.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית. נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ רציונלי} \\ 0 & x \text{ אי רציונלי}\end{cases}$$

בכל קטע באורך חיובי קיימים גם רציונלים וגם אי רציונלים. לכן בכל חלוקה של הקטע יש בכל תת קטע גם נקודה שבה $f(x)=1$ וגם נקודה שבה $f(x)=0$. לכן הסכום העליון שלו יוצא בכל חלוקה ה- $b-a$ והסכום התחתון שלו שווה בכל חלוקה ל- 0. לכן אין סדרת חלוקות שבהן ההפרש בין שני הסכומים שואף ל- 0. לכן הפונקציה לא אינטגרבילית.

שלומי

__שאלה__ (מבחינה של פרופ' מכן)

נתון $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ חשב/י $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-ax^2} dx$

__פתרון__

נשתמש באינטגרציה בחלקים

נגדיר $v = x$; $v' = 1$

$u' = x \cdot e^{-ax^2}$

נחשב $\int x \cdot e^{-ax^2} dx$. נציב $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$

ונקבל $\int x \cdot e^{-ax^2} dx = \int \frac{1}{2} \cdot e^{-at} dt =$

$= -\frac{1}{2a} \cdot e^{-at} = -\frac{1}{2a} \cdot e^{-ax^2}$

לכן

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot x \cdot e^{-ax^2} dx = \left[x \cdot \frac{-1}{2a} e^{-ax^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2a} \cdot e^{-ax^2} dx \overset{*}{=} \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

* מתקיים

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{-1}{2a} \cdot e^{-ax^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot \frac{-1}{2a} \cdot e^{-ax^2} = 0$$

עבור כל a שעבורו האינטגרל הנתון הוא סופי.

אם $a \le 0$ אז $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ אינו סופי.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוקן)

יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \in [c,d]$

וכמו כן $x_n \neq y_n \quad \forall n \in N$

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב- $[c,d]$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$$

פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית.

הרעיון הוא שבנתונים אלה הנגזרת לא חייבת להיות רציפה.

נגדיר פונקציה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x^{1.5}\cdot \sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{1.5}\cdot\sin\frac{1}{x^2}-0}{x}=0$$ מתקיים

נגזור את הפונקציה בנקודה $x\neq 0$ ונקבל

$$f'(x)=1.5\cdot x^{0.5}\cdot\sin\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\cdot\cos\frac{1}{x^2}\cdot x^{1.5}$$

ולנגזרת זו אין גבול כאשר $x\to 0$

ניתן ממש דוגמא לשתי סדרות ששואפות ל-0 ושעבורן הגבול המבוקש לא שואף ל-0.

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\ ,\qquad y_n=\frac{1}{\sqrt{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}}$$

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right)^{1.5}\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)^{1.5}\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right)^{1.5}\cdot 1-0}{\frac{\sqrt{2n\pi}-\sqrt{(2n+0.5)\pi}}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}\cdot\sqrt{2n\pi}}}\right|\geq$$

$$\geq\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{100}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1.5}\cdot n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n\pi}-\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{100}\cdot n^{0.25}\cdot\frac{\left(\sqrt{2n\pi}+\sqrt{(2n+0.5)\pi}\right)}{2n\pi-(2n+0.5)\pi}\right|=\infty$$

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סודין באינפי לפיסיקאים)

נניח כי $f(x)$ רציפה ב- $[0,\infty)$ וכי קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

צ"ל: הוכח כי $f(x)$ רציפה במידה שווה.

פתרון

מכיון שיש לפונקציה גבול a סופי כאשר $x\to\infty$ אז עבור כל $\varepsilon>0$ קיים N כך שעבור כל $x>N$ מתקיים $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן לפי אי שוויון המשולש קיים עבור כל $x_1,x_2>N$: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$!

מכיון שהפונקציה רציפה בקטע $[0,N+1]$ אז עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך שעבור כל $0\le x_3,x_4\le N+1$ המקיימים $|x_3-x_4|<\delta_1$ קיים $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$.

נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,1\}$ אז עבור כל $0\le x_5,x_6<\infty$ המקיימים $|x_5-x_6|<\delta$ קיים $|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon$.

הסבר: אם מתקיים $x_5>N$, $x_6>N$ אז כבר ראינו זאת.
אם אחד מבין x_5 ו- x_6 קטן מ- N אז השני שביניהם לא גדול מ- $N+1$ (כי $\delta\le 1$) ולכן גם ראינו זאת כי $|x_5-x_6|<\delta_1$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' בן ארצי באוני' לפסיכולוגים)
לקבוע האם הפונקציה $\sqrt[3]{x}$ חוצ $\sqrt[3]{x}$ רציפה במידה שווה ב $(-\infty,+\infty)$ ולהוכיח את התשובה.

פתרון
נגזור את הפונקציה ונקבל נגזרת

$$\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sin\sqrt[3]{x}+\cos\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{x}$$

עבור $x>1$ (או עבור כל קבוע חיובי) הנגזרת חסומה.
לכן עבור כל $x_1, x_2 \geq 1$ מתקיים $f(x_1)-f(x_2)=f'(x_3)(x_1-x_2)$ כאשר x_3 הוא נקודה בין x_1 ו-x_2.
עבור $\varepsilon>0$ נבחר $\delta_1=\frac{\varepsilon}{M}$ כאשר M הוא חסם עליון על הנגזרת בקטע $(1,\infty)$. כך עבור $|x_2-x_1|\leq\delta_1$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon$.
הפונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ ולכן היא רציפה בו במידה שווה. נוכל לבחור δ_2 כך שאם $0\leq x_3, x_4\leq 2$, $|x_3-x_4|<\delta_2$ אז $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$.

נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$ ואז עבור x_5, x_6, $|x_5-x_6|<\delta$ מתקיים או ש: $x_5,x_6\geq 1$! $|x_5-x_6|<\delta_1$ או ש $x_5,x_6\leq 2$! $|x_5-x_6|<\delta_2$! בכל אחד מהמקרים הללו $|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon$.

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחנה של פרופ' אדריאן ופרופ' סוביצ'נסקי)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\cdot \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

כאשר $g(0)=g'(0)=0$.

הוכח שהפונקציה גזירה בראשית.

<u>פתרון</u>

לפי הגדרת הנגזרת אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}$ אז הפונקציה גזירה ב 0.

כאן מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x-0}$$

מכיון שהפונקציה g גזירה ב 0 והנגזרת שווה ל 0 אזי עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שעבור כל $|x|\leq\delta$ מתקיים $-|\varepsilon x|\leq g(x)\leq|\varepsilon x|$

מכיון שעבור כל $x\neq 0$ מתקיים $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ לכן מתקיים עבור כל x ש $|x|\leq\delta$:

$$\left|\frac{g(x)\cdot\sin\frac{1}{x}}{x-0}\right|\leq\left|\frac{\varepsilon x}{x}\right|$$

ומתקיים $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-0}{x-0}\right|\leq\varepsilon$ עבור כל $\varepsilon>0$. לכן קיימת בנקודה 0 נגזרת והיא שווה ל 0.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אברמוביץ' ופרופ' סדשנסקי')

הוכח שלא קיימות שתי פונקציות f, g גזירות בקטע $I=(-1,1)$ כך ש $f(0)=g(0)=0$ ו $x=f(x)\cdot g(x)$.

פתרון

נניח בשלילה שקיימות פונקציות גזירות כאלה בקטע. במקרה זה, לפי נוסחת חישוב הנגזרת של מכפלת פונקציות נקבל

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

אך $x=f(x)\cdot g(x)$, לכן מתקיים לכל x בקטע

$$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=1$$

נקבל עבור $x=0$: $f'(0)\cdot g(0)+f(0)\cdot g'(0)=1$

אך נתון $f(0)=g(0)=0$ ולכן לא יתכן שתתקיים הנגזרות עבור $f'(0)$ ו $g'(0)$ נתונים. מש"ל.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

חשב/י $\lim_{\beta\to\infty}\int_0^1 x\cdot e^{\beta(x-1)}\,dx$

פתרון

נחשב עבור β קבוע את $\int_0^1 e^{\beta(x-1)}\,dx$

נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$u=x$, $u'=1$

$v'=e^{\beta(x-1)}$, $V=\frac{1}{\beta}e^{\beta(x-1)}$

$$\int_0^1 x\cdot e^{\beta(x-1)}\,dx=\left[x\cdot\frac{1}{\beta}\cdot e^{\beta(x-1)}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{\beta}\cdot e^{\beta(x-1)}\,dx=\frac{1}{\beta}\cdot e^0-0-\left[\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{\beta(x-1)}\right]_0^1=\frac{1}{\beta}-\left(\frac{1}{\beta^2}\cdot 1-\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{-\beta}\right)$$

כאשר $\beta\to\infty$ אז $\frac{1}{\beta}$ שואף ל 0, $\frac{1}{\beta^2}$ שואף ל 0 ו $\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{-\beta}$ שואף לאפס.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סובן)

חשבו: $\lim_{B\to\infty} \int_0^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx$

פתרון (פתרון קצר נוספת)

עבור כל $B>0$ מתקיים:

$$\int_0^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} x\cdot e^{B(x-1)}dx + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx$$

שני האינטגרלים הם אי שליליים.

עבור כל $0\le x\le 1$ מתקיים $x\cdot e^{B(x-1)} \le e^{B(x-1)}$

לכן האינטגרל הראשון אינו גדול מ (למעשה קטן מ): $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{B(x-1)}dx$. $e^{B(x-1)}$ היא פונקציה מונוטונית עולה

בקטע לכן האינטגרל קטן מ: $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{B(1-\frac{1}{\sqrt{B}}-1)}dx$ ששווה ל

$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{-\sqrt{B}}dx$ שקטן מ $\int_0^1 e^{-\sqrt{B}}dx$ ששווה ל $e^{-\sqrt{B}}$.

אך מתקיים $\lim_{B\to\infty} e^{-\sqrt{B}}=0$.

לגבי האינטגרל השני: מתקיים עבור $x\le 1$:

$e^{B-1}\le 1$ לכן האינטגרל קטן מ: $\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 x\,dx$ שקטן מ:

$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 1dx$ ששווה ל: $\frac{1}{\sqrt{B}}$.

אך $\lim_{B\to\infty}\frac{1}{\sqrt{B}}=0$ לכן האינטגרל שואף ל: 0.

לכן האינטגרל כולו שואף ל 0 כאשר $B\to\infty$.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' גלצנר ופרופ' שצ'רבק)

הראו כי הפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ מקבלת כל ערך ממשי

פתרון

הפונקציה $f(x)$ היא מכפלה של שתי פונקציות רציפות על כל הישר. לכן היא פונקציה רציפה על כל הישר.
לפי משפט ערך הביניים, אם בנקודה מסוימת מתקבל ערך b ובנקודה אחרת מתקבל ערך a, אז בקטע שבין שתי הנקודות מתקבלים כל הערכים שבין a ל b.
נסתכל על ערך ממשי כלשהו d ונראה שהוא מתקבל באיזושהי נקודה. עבור כל ערך d קיימת נקודה x, $x>|d|$ שבה $\sin x=1$ וקיימת נקודה y, $|d|<y$ שבה $\sin y=-1$. בנקודות אלה מתקיים $|d|<x\cdot\sin x$ ו $-|d|>y\cdot\sin y$.
לכן קיימת נקודה z שבין x ל y שבה $z\cdot\sin z=d$.

שאלה (מבחינה של פרופ' לצר)

חשב $\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}$

פתרון

נציב $t=\sqrt{e^x}$:

$$dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^x}}\cdot e^x\,dx=\frac{\sqrt{e^x}}{2}\,dx$$

$$\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}\,dx=\int\frac{2t}{t^2+t}\,dt=\int\frac{2}{t+1}\,dt=2\ln(t+1)=$$

$$=2\ln\left(\sqrt{e^x}+1\right)$$

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' גלצנר ופרופ' שצ'רק)

חשבו את הגבול (אם הוא קיים)

$$\lim_{n\to\infty} n^5\cdot e^{-\sqrt{n}}$$

<u>פתרון</u>

תחילה נוכיח שמתקיים $\lim_{x\to+\infty} x^{10}\cdot e^{-x}=0$

מתקיים $x^{10}\cdot e^{-x}=\frac{x^{10}}{e^{x}}$. זו מנה של שתי פונקציות שלכל אחת מהן יש גבול ∞ כאשר $x\to\infty$. שתי הפונקציות גזירות מכל סדר. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל 10 פעמים. נשים לב שגזירת הפונקציה שבמכנה נותנת את עצמה. אחרי 10 גזירות של הפונקציה שבמונה נקבל 0. לכן הגבול הוא 0.

כעת נשתמש בטענה זו כדי להוכיח את הנדרש.

מכיוון ש- $\lim_{x\to+\infty} x^{10}\cdot e^{-x}=0$ אז עבור $\varepsilon>0$ נתון, קיים T סופי כך שעבור כל $T<\sqrt{n}$ מתקיים

$|(\sqrt{n})^{10}\cdot e^{-\sqrt{n}}|<\varepsilon$. כך עבור כל $\varepsilon>0$, ולכן הגבול הוא 0.
