פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של ד"ר אלי לבר)
קבעו אם הטור $\sum(-1)^n\frac{2n+1}{n^3+5n^2+3}$ מתכנס בהחלט, מתכנס או מתבדר.

<u>פתרון</u>
לכל $n\ge 1$: $0<\frac{2n+1}{n^3+5n^2+3}<\frac{2n+10n+\frac{6}{n^2}}{n^3+5n^2+3}=\frac{2}{n^2}$

מתקיים $\sum\frac{2}{n^2}<\infty$, לכן לפי קריטריון ההשוואה, הטור המקורי מתכנס בהחלט.

<u>שאלה</u> (מבחינה של ד"ר אלי לבר)
מצאו a כך ש $a\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\le a+1$

<u>פתרון</u>
מתקיים: $1\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{1^3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

עבור כל $n\ge 2$ מתקיים: $\frac{1}{n^3}\le\frac{1}{n(n+1)}$

עבור כל n מתקיים $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

לכן, $\sum\frac{1}{n^3}\le 1+\sum\frac{1}{n(n+1)}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$

$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots=1.5$

לכן כל $0.5\le a\le 1$ יתאים.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לבר)

הוכיחו או הפריכו
אם $0<f(x)$ לכל $0<x$ ו $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ אזי f מונוטונית יורדת בקטע מסוים $x>a$.

פתרון
נפריך את הטענה על-ידי מתן דוגמא נגדית.
עבור כל $0<x$ נגדיר פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2x} & x \text{ רציונלי} \\ \frac{1}{x} & x \text{ אי רציונלי} \end{cases}$$

מתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$. עבור כל x רציונלי
קיים $x<y$ כך ש $\frac{1}{y}>\frac{1}{2x}$ (זה קורה עבור $y<2x$).
לכן הפונקציה אינה מונוטונית יורדת.

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לבר)

הוכיחו כי לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים ממשיים.

פתרון
כל הפולינומים הם בעלי נגזרת מכל סדר. נוכיח באינדוקציה על n
שלפולינום ממעלה n אין יותר מ n שורשים ממשיים שונים.
לפולינום ממעלה ראשונה יש רק שורש אחד (פולינום
ממעלה ראשונה הם מהצורה $ax+b$ כאשר a ו b
הם קבועים). נניח שלכל פולינום ממעלה k אין יותר מ k
שורשים ממשיים ונראה שלכל פולינום ממעלה $k+1$ אין
יותר מ $k+1$ שורשים ממשיים שונים. הנגזרת של פולינום
ממעלה $k+1$ היא פולינום ממעלה k. על פי משפט רול,
בין כל שני שורשים שונים של פולינום ממעלה $k+1$,
יש שורש של הנגזרת שלו. אילו לפולינום ממעלה $k+1$
היו יותר מ $k+1$ שורשים, אז היו יותר מ k אינטרוולים
זרים שבכל אחד מהם היתה נקודת התאפסות של הנגזרת.
זו סתירה להנחה.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי להרר)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)$. הוכיחו כי קיים $0\le x\le 1$ כך ש $f(x)=f(x+\frac{1}{3})$.

פתרון

עבור כל $0\le x\le \frac{2}{3}$ נגדיר פונקציה $g(x)=f(x+\frac{1}{3})-f(x)$

$g(x)$ רציפה כהפרש של שתי פונקציות רציפות.

אם קיימות זוג נקודות x_1, x_2 כך ש $g(x_1)>0$ ו $g(x_2)<0$

אז מכיון שהפונקציה g היא רציפה אז לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה x_3 בין x_1 ל x_2

כך ש $g(x_3)=0$ ובנקודה זו מתקיים $f(x_3)=f(x_3+\frac{1}{3})$.

כעת נוכיח שלא יתכן ש $g(x)>0$ לכל $0\le x\le \frac{2}{3}$

(ההסבר שלא יתכן ש $g(x)<0$ לכל $0\le x\le \frac{2}{3}$ הוא דומה).

אילו היה מתקיים $g(x)>0$ לכל $0\le x\le \frac{2}{3}$ אז

היה מתקיים $f(\frac{1}{3})>f(0)$, $f(\frac{2}{3})>f(\frac{1}{3})$, $f(1)>f(\frac{2}{3})$

ואז היה מתקיים $f(1)>f(0)$ וזאת בניגוד לנתון.

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי להרר)

חשבו $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$

פתרון

נציב: $t=e^x$, $dt=e^x dx$, $x=1 \Longrightarrow t=e$.

לכן נקבל $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx=\int_e^\infty \frac{dt}{t^2+2t+1}=\int_e^\infty \frac{dt}{(t+1)^2}=$

$$=\left[\frac{-1}{t+1}\right]_e^\infty=\frac{1}{e+1}$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרבק)

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת על-ידי נוסחת הנסיגה

$$a_{n+1}=a_n(2-a_n) \quad , \quad n\ge 1$$

נתון $0<a_1<1$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון

טענה: אם $0<a_n\le 1$ אז $a_{n+1}\ge a_n$

הסבר: $a_{n+1}=a_n(2-a_n) \overset{*}{\ge} a_n\cdot 1$

* עבור $0<a_n\le 1$ מתקיים $2-a_n\ge 1$.

טענה: מתקיים $a_n\le 1$ עבור כל n.

הסבר: מתקיים $a_1\le 1$. נניח באינדוקציה ש $a_n\le 1$ ונוכיח ש $a_{n+1}\le 1$.

$$a_{n+1}=a_n(2-a_n)=\left(\sqrt{a_n(2-a_n)}\right)^2 \overset{*}{\le}\left(\frac{a_n+(2-a_n)}{2}\right)^2=1$$

* אי שוויון הממוצעים

משתי הטענות נקבל שהסדרה מונוטונית לא יורדת ויש לה חסם עליון של 1. לכן קיים לה גבול.
מתקיים $a=\lim_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n(2-a_n)$$

ולפי אריתמטיקה של גבולות $a=a(2-a)$

הפתרונות של המשוואה הם $a=0,1$ אבל מתקיים לכל n ש $a_n\ge a_1>0$ לכן הגבול לא יכול להיות שווה ל 0. לכן הגבול 1.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של ברוך שלרק)

הפונקציה $f(x)$ רציפה ומקיימת $|f(x)-3x|<1$ לכל $x\in R$. הוכיחו או הפריכו על-ידי דוגמה

א. לכל $a\in R$ קיים פתרון למשוואה $f(x)=a$.

ב. $\lim_{x\to\infty}(f(x)-3x)$ קיים במובן רחב.

פתרון

א. הטענה נכונה.

נסתכל על a מסוים כלשהו ונראה שיש פתרון למשוואה.

נסתכל למשל על $x_1=\frac{1}{3}a-5$

$$|f(x_1)-3x_1|=|f(x_1)-(a-15)|<1$$

ולכן $f(x_1)<a$

נסתכל למשל על $x_2=\frac{1}{3}a+5$

$$|f(x_2)-3x_2|=|f(x_2)-(a+15)|<1$$

ולכן $f(x_2)>a$.

מכיון שהפונקציה f היא פונקציה רציפה אז קיים $x_1<x_3<x_2$ שעבורו $f(x_3)=a$.

ב. הטענה לא נכונה.

נסתכל על פונקציה $f(x)=3x-(\sin x)/2$

מתקיים לכל x $|f(x)-3x|=|(\sin x)/2|<1$

מתקיים לכל x $f(x)-3x=(\sin x)/2$

אבל ל-$(\sin x)/2$ אין גבול כאשר $x\to\infty$.

הפונקציה $f(x)=3x-(\sin x)/2$ היא פונקציה רציפה כהפרש של שתי פונקציות רציפות.

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רדק)

הוכיחו: לכל $0<y<x$ מתקיים $\frac{1}{3x^3}<\frac{\ln(x)-\ln(y)}{x^3-y^3}<\frac{1}{3y^3}$

פתרון

הפונקציה $\ln x$ היא פונקציה רציפה וגזירה עבור כל $x>0$, מתקיים $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

על-פי משפט לגרנז' $\ln x-\ln y=\frac{1}{t}(x-y)$ כאשר $y<t<x$ (איזשהו t כזה)

לכן

$$\frac{\ln x-\ln y}{x^3-y^3}=\frac{\frac{1}{t}(x-y)}{x^3-y^3}=$$

$$=\frac{x-y}{t(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{1}{t(x^2+xy+y^2)}$$

מתקיים $t<x$! $x^2+xy+y^2<3x^2$

לכן ביטוי זה גדול מ: $\frac{1}{x\cdot 3x^2}=\frac{1}{3x^3}$

מתקיים $y<t$! $x^2+xy+y^2>3y^2$

לכן ביטוי זה קטן מ: $\frac{1}{y\cdot 3y^2}=\frac{1}{3y^3}$

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רדק)

חשבו $\int \ln(x^2+3x+2)\,dx$

פתרון (בקיצור)

$$\int \ln(x^2+3x+2)\,dx=\int \ln[(x+1)(x+2)]\,dx=$$

$$=\int \ln(x+1)\,dx+\int \ln(x+2)\,dx=[(x+1)\ln(x+1)-x]+$$

$$+[(x+2)\ln(x+2)-x]$$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרבק)
חשבו את האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x}\,dx}{3+e^{4x}}$$

פתרון:
נציב $t=e^{2x}$, $dt=dx\cdot 2e^{2x}$, $x=0\Rightarrow t=1$,
$x\to\infty \Longrightarrow t\to\infty$

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{3+e^{4x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{6}\int_1^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt3}\right)^2+1}$$

נציב $u=\frac{t}{\sqrt3}$, $dt=\sqrt3\,du$, $t=1\Longrightarrow u=\frac{1}{\sqrt3}$

נקבל

$$\frac{1}{2\sqrt3}\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^\infty \frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{2\cdot\sqrt3}\arctan u\Big]_{\frac{1}{\sqrt3}}^\infty=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרבק)
חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to0}\left(x+e^{2x}\right)^{2/x}$$

פתרון

$$\lim_{x\to0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^{2x}}+1\right)^{\frac{2}{x}}\cdot\left(e^{2x}\right)^{2/x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\frac{x}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{x}}\right)^{\frac{2}{e^{2x}}}\cdot\lim_{x\to0}\left(e^{2x}\right)^{2/x}=$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{2}{e^{2x}}}\cdot e^4=e^6$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{(\sin x)^3}$$

פתרון

מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\left|\int_0^x \sin(t^2)\,dt\right| \le \lim_{x\to 0}\left|\int_0^x 1\,dt\right| = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^3 = 0 \quad \text{מתקיים}$$

כך, שתי הפונקציות שבמונה ובמכנה שואפות לאפס כאשר $x\to 0$. שתיהן גזירות ולכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{(\sin x)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3\cdot\sin^2 x}$$

שתי הפונקציות שבמונה ובמכנה שוב שואפות לאפס והן גזירות מכל סדר, לכן נוכל שוב להשתמש בכלל של לופיטל. נעשה זאת כמה פעמים וגם נצמצם כמו קודם גורמים ששואפים ל 1. נקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3\cdot\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{3\cdot 2\cdot\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{6\cdot\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{6\cdot\cos x} = \frac{1}{3}$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

האם קיים $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sin x}$ יש לנמק את תשובתכם.

פתרון

טענה: עבור כל $0<x<1$: $x+\sin x>0$

הסבר: נכון סכום של שתי פונקציות שהן חיוביות בקטע.

טענה: עבור כל $0<x<1$: $x+\sin x<3x$

הסבר: נגדיר פונקציה $f(x)=3x-(x+\sin x)$

על פי משפט לגרנז' מתקיים

$$f(x)=f(0)+f'(t)\cdot(x-0)$$

כאשר t היא נקודה $0<t<x$

מתקיים $f(0)=0$ ו $f'(t)=2-\cos t>0$

לכן $f(x)>0$ ולכן $x+\sin x<3x$.

משתי הטענות נקבל

$$\int_a^1 \frac{dx}{x+\sin x} \geq \int_a^1 \frac{dx}{3x} = \frac{1}{3}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \left[\frac{\ln x}{3}\right]_a^1$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(a)$$

אך כאשר $a\to 0$ מתקיים $\lim_{a\to 0}\ln(a)=-\infty$

ולכן האינטגרל לא קיים.

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

מצאו קירוב רציונלי ל- $\sqrt{(4.5)^3}$ עם שגיאה שלא עולה על 0.001.

פתרון

נסתכל על הפונקציה $f(x)=x^{1.5}$. צריך לקרב את ערכה בנקודה $x=4.5$, נשתמש בפיתוח טיילור.

$$f(4.5)=f(4.41)+f'(4.41)(4.5-4.41)+$$
$$+f''(4.41)\cdot\frac{(4.5-4.41)^2}{2!}+f^{(3)}(t)\frac{(4.5-4.41)^3}{3!}$$

כאשר $4.41<t<4.5$ מתקיים

$$f(4.41)=4.41^{3/2}=2.1^3$$
$$f'(4.41)=1.5\cdot 4.41^{0.5}=1.5\cdot 2.1$$
$$f''(4.41)=\frac{3}{4}\cdot 4.41^{-0.5}=\frac{3}{4\cdot 2.1}$$
$$\left|f^{(3)}(t)\cdot\frac{(4.5-4.41)^3}{3!}\right|=\frac{1}{8}\cdot t^{-1.5}\cdot\frac{0.09^3}{6}<\frac{0.09^3}{6}<0.001$$

לכן קירוב מספק הוא

$$2.1^3+\frac{3}{2}\cdot 2.1\cdot 0.09+\frac{3}{4\cdot 2.1}\cdot\frac{0.09^2}{2}=$$
$$=2.1\left(2.1^2+0.135\right)+\frac{81}{8\cdot 7000}=$$
$$=2.1\left(4.41+0.135\right)+\frac{81}{56000}=$$
$$=\frac{534492+81}{56000}=\frac{534573}{56000}$$

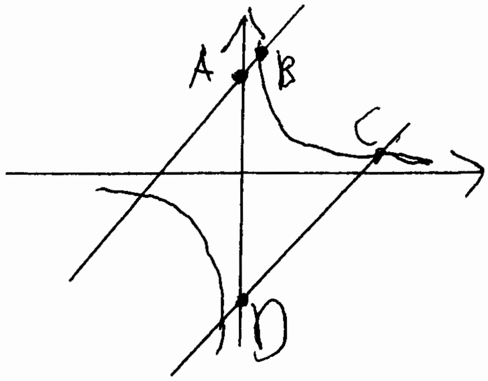
פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רקי)

חשבו את השטח הכלוא בין הקווים $xy=3$, $y+x=2$, $y-x=2$

פתרון



משיקולי סימטריה השטח S שווה לפעמיים השטח S_{ABCD}.

נמצא את שיעורי הנקודה B:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{x} \\ y=x+2 \end{cases}$$

והנקודה היא $(1,3)$.

נמצא את שיעורי הנקודה C

$$\begin{cases} y=\frac{3}{x} \\ y=x-2 \end{cases}$$

והנקודה היא $(3,1)$

בנוסף $A=(0,2)$, $D=(0,-2)$.

$$S=2\cdot S_{ABCD}=2\left[\int_0^1 (x+2)-(x-2)\,dx+\int_1^3 \frac{3}{x}-(x-2)\,dx\right]=2\cdot\int_0^1 4\,dx+\left[6\ln x-x^2+4x\right]_1^3$$

$$=8+6\cdot\ln(3)$$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

הפונקציה $f(x)$ היא רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$ ומקיימת $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$ עבור $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו על-ידי דוגמה

א) $\lim_{n\to\infty} \sin(f(n^2))=0$ ב) $\lim_{n\to\infty} f(f(n))=0$

פתרון

א. מתקיים.

מכיון שמתקיים $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$ אז גם מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(n^2)=0$ (n^2 הם שלמים) לכן עבור כל $\delta>0$ נתון קיים N כך שעבור כל $n>N$ $|f(n^2)|<\delta$. הפונקציה $\sin$ היא רציפה ב-0 (למעשה גם בכל נקודה), מתקיים $\sin 0=0$, לכן עבור כל $\varepsilon>0$ נתון קיים δ שעבור כל x, $|x|<\delta$ מתקיים $\sin x<\varepsilon$. נבחר N מספיק גדול כך שעבור כל $n>N$ $|f(n^2)|<\delta$ עבור אותו δ הנדרש בשביל ε נתון.

ב. נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמה נגדית. נגדיר

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\le 0 \\ 1-x & 0<x<1 \\ 0 & 1\le x \end{cases}$$

זו פונקציה רציפה, עבור כל n שלם $n\ge 1$ מתקיים $f(n)=0$ ולכן $f(f(n))=f(0)=1$. לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(f(n))=\lim_{n\to\infty} 1=1$.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שליבק)

חשבו את הגבולות

(א). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$

(ב) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}\right)^{(x/\ln(x))}$

פתרון

(א) המונה והמכנה שואפים כל אחד ל $+\infty$ כאשר $x\to+\infty$, הם גזירים מכל סדר ולכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt + x\cdot e^{x^2}}{2x\cdot e^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}+2\cdot x\cdot x\cdot e^{x^2}+e^{x^2}}{2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}+2\cdot e^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+2x^2}{4x^2+2} = \frac{1}{2}$$

(ב)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+\ln x}{x-\ln x}\right)^{(x/\ln x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{x-\ln x}{x-\ln x}+\frac{2\ln x}{x-\ln x}\right)^{\frac{x-\ln x}{2\ln x}}\right)^{\frac{2x}{x-\ln x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{x-\ln x}{x-\ln x}+\frac{1}{\frac{x-\ln x}{2\ln x}}\right)^{\frac{x-\ln x}{2\ln x}}\right)^{\frac{2x}{x-\ln x}}$$

אריתמטיקה של גבולות

$= e^2$ (הגבול של המעריך החיצוני הוא 2).

שאלה (מבחינה של פרופ' שלזרק)

חשבו את האינטגרל $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}$ אם הוא קיים.

פתרון $t=e^x$, $dt=t\cdot dx$, $x=2\Rightarrow t=e^2$.

נקבל
$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dt}{(t-1)\cdot t}$$

הפונקציה $\frac{1}{(t-1)t}$ היא חיובית עבור כל $t\geq e^2$, לכן האינטגרלים $\int_{e^2}^{a}\frac{dt}{(t-1)t}$ הם עולים כאשר a עולה.

אם קיים להם הגבול כאשר $a\to+\infty$ אז קיים האינטגרל $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dt}{(t-1)t}$. מכיון שהם מונוטונים עולים אז אם קיים הגבול של $\int_{e^2}^{e^2+n}\frac{dt}{(t-1)t}$ כאשר n הם שלמים; $n\to+\infty$, אז קיים הגבול כאשר $a\to+\infty$.

מתקיים:
$$\int_{e^2}^{e^2+n}\frac{dt}{(t-1)t}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\frac{dt}{(t-1)t}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\sum_{k=-1}^{n-2}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\frac{dt}{t}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\frac{1}{t}\overset{*}{=}\int_{e^2-1}^{e^2}\frac{dt}{t}-\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}=$$
$$=\ln t\Big]_{e^2-1}^{e^2}-\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}=2-\ln(e^2-1)-\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}$$

(* איברים מתבטלים ורק שני הקיצונים נשארים.)

הקטע בין e^2+n-1 ל e^2+n הוא באורך 1 והערך המקסימלי של הפונקציה בקטע זה הוא $\frac{1}{e^2+n-1}$. לכן כאשר $n\to\infty$: $\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}\to 0$ ולכן הגבול של סדרת האינטגרלים הוא $2-\ln(e^2-1)$ וזהו ערכו של $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}$

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שלידק)

הוכיחו: לכל $0<y<x$ מתקיים $y^2 < \frac{x^2\cdot e^x - y^2\cdot e^y}{e^x - e^y} < (x+1)^2$

<u>פתרון</u>

נוכיח אי שוויון שמאלי: $e^x - e^y > 0$!

$$x^2\cdot e^x - y^2\cdot e^y > y^2\cdot e^x - y^2\cdot e^y = y^2(e^x - e^y) > 0$$

לכן

$$\frac{x^2\cdot e^x - y^2\cdot e^y}{e^x - e^y} > \frac{y^2(e^x-e^y)}{e^x-e^y} = y^2$$

נוכיח אי שוויון ימני:

נגדיר $t = e^x$, $z = e^y$. כך:

$$x^2\cdot e^x = \ln^2 t\cdot t \quad , \quad y^2\cdot e^y = \ln^2 z\cdot z$$

הפונקציה $f(w) = \ln^2 w\cdot w$ היא פונקציה רציפה וגזירה עבור כל $w>0$, מתקיים:

$$f'(w) = 2\ln w\cdot\frac{1}{w}\cdot w + \ln^2 w = 2\ln w + \ln^2 w$$

לפי משפט לגרנז' מתקיים עבור איזשהו w: $y<w<x$

$$\ln^2 t\cdot t - \ln^2 z\cdot z = f'(w)(t-z) =$$

$$= (2\ln w + \ln^2 w)(t-z) < (2\ln e^x + \ln^2 e^x)(e^x - e^y) =$$

$$= (2x + x^2)(e^x - e^y)$$

לכן

$$\frac{x^2\cdot e^x - y^2\cdot e^y}{e^x - e^y} < 2x + x^2 < 1 + 2x + x^2 = (x+1)^2$$

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שלידק)

<u>תשבו</u> $\int \ln(x^2+2x+2)dx$

<u>פתרון</u>

נציב $t = x+1$ ונקבל $\int \ln(x^2+2x+2)dx = \int \ln(t^2+1)dt$

נשתמש באינטגרציה בחלקים: $u = \ln(t^2+1)$, $u' = \frac{2t}{t^2+1}$,

$v' = 1$, $v = t$. נקבל $t\cdot\ln(t^2+1) - 2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt =$

$$= t\cdot\ln(t^2+1) - 2\int dt + 2\int\frac{dt}{t^2+1} = t\cdot\ln(t^2+1) - 2t + 2\arctan(t) =$$

$$= (x+1)\cdot\ln(x^2+2x+2) - 2(2x+1) + 2\arctan(x+1)$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שלזינגר)

חשבו את נפח הגוף המתקבל ע"י סיבוב הקשת $y=\cos^2x$, $0\le x<\pi/2$ סביב ציר ה-x.

פתרון

$$V=\int_0^{\pi/2}\pi\cdot\left(\cos^2x\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$$

נחשב את $\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$. בשביל זה נחשב אינטגרלים אחרים.

$$\pi/2=\int_0^{\pi/2}dx=\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2dx=\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx+\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx+\int_0^{\pi/2}2\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x\,dx$$

בקטע $[0,\pi/2]$ מתקיים $\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$

לכן $\pi/2=2\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx+2\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cos^2x\,dx$

לכן $\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx=\pi/4-\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cos^2x\,dx$

מתקיים $\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cdot\cos^2x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx$

מתקיים $\pi/2=\int_0^{\pi/2}dx=\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx+\int_0^{\pi/2}\cos^2 2x\,dx$

בקטע זה מתקיים $\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 2x\,dx$

לכן $\int_0^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx=\pi/4$; $\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cdot\cos^2x\,dx=\pi/16$

נקבל ש: $\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx=\pi\left(\pi/4-\pi/16\right)=\frac{3\pi^2}{16}$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

תהי $f:(0,\infty)\to R$ פונקציה גזירה פעמיים. נתון $f''>0$ ב-$(0,\infty)$?

הוכח/י שלכל $x>0$ מתקיים $f(2x)-f(x)\le f(3x)-f(2x)$

פתרון

הפונקציה f גזירה פעמיים בקטע $[x,2x]$ לכן היא רציפה וגזירה בקטע זה, לכן לפי משפט לגרנג' קיים

$$f(2x)-f(x)=f'(y)(2x-x)=f'(y)\cdot x$$

כאשר y היא איזשהי נקודה המקיימת $x<y<2x$.

הפונקציה f גזירה פעמיים בקטע $[2x,3x]$ לכן היא רציפה וגזירה בקטע זה לכן לפי משפט לגרנג' קיים

$$f(3x)-f(2x)=f'(z)\cdot(3x-2x)=f'(z)\cdot x$$

כאשר z היא איזשהי נקודה המקיימת $2x<z<3x$.

הפונקציה f' היא גזירה בקטע $[x,3x]$ ולכן היא גם רציפה בקטע $[x,3x]$. היא גם רציפה וגזירה בקטע $[y,z]$ לפי משפט לגרנג' מתקיים

$$f'(z)-f'(y)=(z-y)\cdot f''(w)$$

כאשר $y<w<z$

$f''(w)>0$ ולכן $f'(z)>f'(y)$.

לכן $f(2x)-f(x)\le f(3x)-f(2x)$.

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח/י שלכל $R\ni x>0$ מתקיים

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

פתרון

$f(x)=\ln(1+x)$ רציפה וגזירה בכל נקודה $0\le x$. נסתכל על איזשהו x קבוע. עבור איזשהי נקודה w $0<w<x$ מתקיים

$$f(x)=f(x)+f'(w)\cdot x=\ln(1+0)+\frac{x}{1+w}=\frac{x}{1+w}.$$

מכיון ש $1+w<1+x$ אז מתקבל אי השוויון השמאלי.

מכיון ש $1+w>1$ אז מתקבל אי השוויון הימני.

שאלה (מבחינה של ברוך סוכן)

תהי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-1,1]$ בצורה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $f(x)$ רציפה ב $x=0$

ב. $f(x)$ אינטגרבילית ב $[0,1]$.

פתרון

א. נוכיח את הטענה.
מתקיים $f(0)=0$. עבור כל $\varepsilon>0$ נתון קיימת סביבה של 0 שבה $|f(x)|<\varepsilon$ (נבחר סביבה שהיא הקטע $(-\varepsilon,\varepsilon)$. אם $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ו x רציונלי אז $|f(x)|=|x|<\varepsilon$ ואם $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ו x אי רציונלי אז $|f(x)|=0<\varepsilon$).
לכן הפונקציה רציפה ב 0.

ב. נפריך את הטענה.
נראה שהיא לא אינטגרבילית למשל בקטע החלקי $[0.5,1]$ ולכן היא לא אינטגרבילית בקטע כולו.
בכל חלוקה של הקטע $[0.5,1]$ יש בכל קטע נקודה שבה $f(x)=0$ (כי בכל קטע יש מספרים אי רציונליים) ויש גם נקודה שבה $f(x)\geq 0.5$ (כי בכל קטע יש מספרים רציונליים). לכן בכל החלוקה ההפרש בין הסכום העליון לסכום התחתון הוא לפחות $0.5\cdot 0.5=0.25$ (כאשר 0.5 הוא אורך הקטע $[0.5,1]$).

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלנה גורליק)

חשב $\lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n^2)\right)$

פתרון

נראה שקיים הגבול $\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)\right)$ ונחשב אותו. מכאן נקבל שקיים הגבול הנדרש (שהוא אותו גבול).

$$\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)}{\frac{1}{x^3}}$$

כאשר $x\to\infty$ אז גם המונה וגם המכנה שואפים לאפס. שתי הפונקציות שבמונה ובמכנה הן גזירות, לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל שלפיו הגבול של המנה שווה לגבול של מנת הנגזרות.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{1+x^4}}{-\frac{3}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{3(1+x^4)}=\infty$$

שאלה (מבחינה של ד"ר אלנה גורליק)

בדוק האם הטור $\sum\frac{(-1)^n\cdot n^n}{3^n\cdot n!}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

פתרון

נגדיר $a_n=\frac{(-1)^n\cdot n^n}{3^n\cdot n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{e}{3}$$

לכן לפי מבחן המנה הטור מתכנס בהחלט.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורדיל)

הוכח כי $\sqrt{1+2x} \le 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$ לכל $x>-\frac{1}{2}$.

(רמז: ניתן להיעזר בפיתוח טיילור מקלורן).

פתרון

נגדיר פונקציה $f(x)=\sqrt{1+2x}-1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3$

ונראה שהיא לא חיובית בכל התחום. מכאן תנבע הטענה שצריך להוכיח. הפונקציה גזירה מכל סדר בתחום.

$$f(0)=0$$
$$f'(x)=(1+2x)^{-1/2}-1+x-\frac{3}{2}x^2$$
$$f''(x)=-(1+2x)^{-3/2}+1-3x$$
$$f^{(3)}(x)=3(1+2x)^{-5/2}-3$$
$$f^{(4)}(x)=-15\cdot(1+2x)^{-7/2}$$

מתקיים $f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$

לכן עבור כל $x>-\frac{1}{2}$ קיים

$$f(x)=f^{(4)}(c)\cdot\frac{x^4}{4!}$$

כאשר c היא נקודה בקטע שבין 0 ל x (שארית לגרנז').

אך $f^{(4)}(c)=-15(1+2c)^{-7/2}<0$ $\left(-\frac{1}{2}<c\right)$

לכן הפונקציה לא חיובית בכל נקודה בתחום.

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורדיל)

תהי $f(x)$ רציפה וגזירה בקטע $(0,\infty)$ כך ש $f(n)=0$ לכל $n\in N$ וקיים גבול סופי $\lim f'(x)=L$. הוכח כי $L=0$.

פתרון

עבור כל n קיים $f(n+1)=f(n)+f'(x)\cdot 1$ כאשר x היא נקודה המקיימת $n<x<n+1$. לכן עבור כל n קיים x $n<x<n+1$ כך ש $f'(x)=0$. אך אם היה מתקיים $L\neq 0$ אז עבור n מספיק גדגל לא היה קיים $x>n$ כך ש $f'(x)=0$.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורליק)

הוכח כי למשוואה $x^3-6x^2+9x=2$ יש בדיוק שלושה פתרונות שונים.

פתרון

נגדיר פונקציה $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$. למשוואה יש פתרונות בדיוק בנקודות בהן הפונקציה מתאפסת. הפונקציה גזירה מכל סדר. בין כל שתי נקודות שבהן הפונקציה מתאפסת, יש נקודת התאפסות של הנגזרת שלה. בין כל שתי נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת, יש נקודת התאפסות של הנגזרת השניה. אבל הנגזרת השניה היא פונקציה לינארית לכן היא לא מתאפסת ביותר מנקודה אחת.
לכן $f(x)$ מתאפסת בלא יותר מ 3 נקודות שונות.
מתקיים: $f(0)<0$, $f(1)>0$, $f(3)<0$, $f(10)>0$. f רציפה. לפי משפט ערך הביניים, בין כל שתי נקודות שבהן סימן הפונקציה הוא שונה, קיימת נקודת התאפסות של הפונקציה.

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורליק)

הוכח או הפרך: אם $f(x)$ גזירה ב- R אזי $f'(x)$ רציפה ב R.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

הפונקציה גזירה עבור כל $x\neq0$ (כמכפלת פונקציות גזירות).
היא גזירה ב 0 כי קיים $\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}$
עבור $x\neq0$ קיים $f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cdot x^2\cdot\cos(\frac{1}{x})$
אבל ל $\cos\frac{1}{x}$ לא קיים הגבול כאשר $x\to0$.
לכן הנגזרת לא רציפה ב 0.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחנה של ד"ר אלנה גורביץ')

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$. מצאו נוסחת נסיגה עבור

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx\ ,\quad n=0,1,2,\dots$$

כולל תנאי התחלה (I_0).

פתרון

$$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$$

כדי לחשב את I_n נשתמש באינטגרציה בחלקים.

$$v=\sqrt{a+bx}\cdot\frac{2}{b}\ ,\quad v'=\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\ ,\quad u'=n\cdot x^{n-1}\ ,\quad u=x^n$$

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx=x^n\cdot\sqrt{a+bx}\cdot\frac{2}{b}-\frac{2n}{b}\cdot\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,dx$$

$$=\frac{2}{b}\cdot x^n\cdot\sqrt{a+bx}-\frac{2n}{b}\cdot\int\frac{x^{n-1}(a+bx)}{\sqrt{a+bx}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{b}\cdot x^n\sqrt{a+bx}-\frac{2na}{b}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx}}\,dx-2n\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{b}\cdot x^n\cdot\sqrt{a+bx}-\frac{2na}{b}\cdot I_{n-1}-2n\cdot I_n$$

נקבל

$$I_n=\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2}{b}\cdot x^n\sqrt{a+bx}-\frac{2na}{b}\cdot I_{n-1}\right]$$

<u>שאלה</u> (מבחינה של ד"ר אלה גורליק)

נתון טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ לכל $n \in N$. בדוק האם

(i) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n}{a_n}$ מתכנס.

(ii) הטור $\sum \sin^2 a_n$ מתכנס.

<u>פתרון</u>

(i) מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ אז קיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

לכן קיים $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = \infty$

(ii) שוב מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} = 1$

ולכן התכנסות הטור $\sum \sin a_n^2$ שקולה להתכנסות הטור $\sum a_n^2$. מכיון ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז קיים

N כך שעבור כל $n > N$ $a_n^2 < a_n$, לכן הטור $\sum a_n^2$ מתכנס. נקבל שהטור $\sum \sin^2 a_n$ מתכנס.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' ניר סוכן)

יהיו f, g פונקציות רציפות ב $[a,b]$ כך שלפחות אחת מהן אין שורשים ב $[a,b]$. צ"ל להוכיח שקיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש $g(c)\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

פתרון

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $g(x)$ לא מתאפסת בקטע. מכיון שהיא רציפה אז או שהיא חיובית בכל הקטע או שהיא שלילית בכל הקטע. נניח שהיא חיובית בכל הקטע. ההוכחה במקרה האחר היא דומה.

נגדיר פונקציה $h(t)$: $h(t) = g(t)\int_a^b f(x)dx - f(t)\int_a^b g(x)dx$

בנקודות שבהן h מתאפסת מתקיים התנאי הנדרש.

$h(t)$ רציפה כהפרש של מכפלות של פונקציות רציפות. נסתכל על הפונקציה $r(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$. מכיון ש $g(x)$ לא מתאפסת ומכיון ש $f(t)$ ו $g(t)$ הן רציפות, אז המנה היא רציפה. אם $r(t)$ היא פונקציה קבועה בקטע אז $h(t)=0$ בכל נקודה בקטע. אחרת קיימת נקודה d_2 בה $r(t)$ מקבלת ערך מכסימלי e_2 בקטע וקיימת נקודה d_3 בה $r(t)$ מקבלת ערך מינימלי e_3 בקטע.

טענה: $e_3 \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le e_2$

הסבר: הפונקציה $f(x)$ אינה גדולה בכל נקודה מהפונקציה $e_2 g(x)$ ואינה קטנה מהפונקציה $e_3 g(x)$

מתקיים $h(d_2) = g(d_2)\int_a^b f(x)dx - e_2 g(d_2)\int_a^b g(x)dx \le$

$\le g(d_2)\left[e_2\int_a^b g(x)dx - e_2\int_a^b g(x)dx\right] = 0$

מתקיים $h(d_3) = g(d_3)\int_a^b f(x)dx - e_3 g(d_3)\int_a^b g(x)dx \ge$

$\ge g(d_3)\left[e_3\int_a^b g(x)dx - e_3\int_a^b g(x)dx\right] = 0$

מכיון שהפונקציה h היא פונקציה רציפה אז לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה בין d_2 ל d_3 שבה הפונקציה מתאפסת.

שאלה (מבחינה של פרופ' נ"ר סיגן)

צריך לחשב $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}$

פתרון

נסתכל על $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}$. עבור כל k,n מתקיים

$1 \ge \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} \ge \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}}$, לכן עבור כל n נתון הסכום אינו גדול

מ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = 1$ ואינו קטן מ: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}}$

נראה ש $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} = 1$ ומכאן נקבל שהגבול המבוקש הוא 1.

נחשב תחילה $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{2n^2}$ ונראה שהוא אפס. לכן

לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} = 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2)+2\ln(n)}{n} = 0$$
