

## מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תש"ע, מועד

תאריך:

מרצים: פרופ' נוגה אלון, פרופ' מיכה שריר

מתרגלים: רני הוד, אדם שפר

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.

במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים. על האלגוריתם להיות דטרמיניסטי, אלא אם צוין אחרת.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

**בהצלחה!**

	1
	2
	3
	4
	5

**שאלה 1**

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  המיוצג ע"י רשימות שכנות. קבוצת צמתים  $U \subseteq V$  נקראת **טגודה** אם אין קשת מכוונת מ- $U$  אל  $V \setminus U$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא קבוצה טגודה בעלת מספר איברים קטן ביותר (אך לא ריקה).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**שאלה 2**

יהיו  $T = (V, A)$  ו- $T' = (V, A')$  זוג עצים פורשים מינימאליים שונים בגרף קשיד, לא מכוון וממושקל  $G = (V, E)$ . הוכיחו שבכל מעגל של הגרף  $(V, A \cup A')$  ישנן שתי קשתות שונות בעלות אותו משקל.

הוכחה:

## שאלה 3

נתונים גרף מכוון  $G = (V, E)$  עם משקל ממשי  $w(e)$  עבור כל קשת  $e \in E$ , ומקור  $s \in V$  כך שקיימת מסילה מכוונת מ- $s$  לכל צומת  $v \in V$ . בנוסף, ידוע שאין ב- $G$  מעגלים שליליים. לכל  $v \in V$ , נסמן ב- $\delta(s, v)$  את המשקל הקטן ביותר של מסילה מכוונת מ- $s$  אל  $v$ , ולכל קשת  $(u, v) \in E$  נגדיר  $w^*(u, v) = w(u, v) + \delta(s, u) - \delta(s, v)$ .

## סעיף א'

הוכיחו כי  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$  לכל קשת  $(u, v) \in E$ , והסיקו כי  $w^*(u, v) \geq 0$ .

הוכחה:

## סעיף ב'

תארו ונמקו תנאי הכרחי ומספיק לכך שעבור קשת  $(u, v)$  מתקיים  $w^*(u, v) = 0$ .

תנאי:  $w^*(u, v) = 0$  אם ורק אם

הסבר:

**שאלה 4**

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הקובע אם בגרף מכוון  $G = (V, E)$  קיים תת גרף פורש (כלומר, תת גרף  $(V, E')$  כך ש- $E' \subseteq E$  שבו כל דרגת כניסה וכל דרגת יציאה היא בדיוק 2.

יעילות:
---------

אלגוריתם והסבר:
-----------------

**שאלה 5****סעיף א'**

נתון גרף דו-צדדי  $G = (V, E)$  בעל  $n$  צמתים בכל צד. תארו אלגוריתם (דטרמיניסטי) יעיל ככל האפשר שיקבע האם ל- $G$  מספר אי זוגי של זיווגים מושלמים.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

**סעיף ב'**

נתון גרף דו-צדדי  $G = (V, E)$  בעל  $n$  צמתים בכל צד. בנוסף, נתונה פונקציית משקל  $w$  כך ש- $w(e) \in \{1, 2, 3, 4\}$  עבור כל קשת  $e \in E$ . תארו אלגוריתם הסתברותי יעיל ככל האפשר שיקבע האם יש בגרף זיווג מושלם שסכום משקלי קשתותיו בדיוק  $2n$ .

יעילות:

אלגוריתם והסבר: