

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' תש"ע, מועד ב'

תאריך: 24/06/10

מרצים: פרופ' יוסי עזר, פרופ' רון שמיר.

מתרגלים: ידעאל ולדמן, אדם שפר.

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י דשימת שכנויות.

בהצלחה!

		1
		2
		3
		4
		5

שאלה 1**סעיף א'**

נתונים רשת זרימה מכוונת $G = (V, E)$ וזוג קודקודים $s, t \in V$, כך שבנוסף לפונקציית הקיבול על הקשתות $C : E \rightarrow \mathbb{N}_1$, קיימת גם פונקציית קיבול על הצמתים $D : V \rightarrow \mathbb{N}_1$ (תזכורת: \mathbb{N}_1 הינה קבוצת השלמים החיוביים). נגיד שזרימה היא חוקית אם היא מקיימת את כל אילוצי הזרימה הרגילים, ובנוסף – הזרימה שנכנסת לכל צומת אינה עולה על קיבול הצומת (במקרה של המקור, הזרימה היוצאת מהצומת). תארו אלגוריתם יעיל למציאת זרימה חוקית מקסימלית מ- s אל t .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב'

כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון שכל קיבולי הקודקודים, פרט לאלו של s ושל t , הם 1?

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל חיובית על הקשתות $w : E \rightarrow (0, \infty)$. בנוסף, נתונה קבוצת קשתות $E' \subseteq E$, כך שנת הגרף $G' = (V, E')$ חסר מעגלים. תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא, מבין העצים הפורשים המכילים את כל קשתות E' , עץ בעל משקל מינימאלי (שימו לב שלא בהכרח מדובר בעפ"מ).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

סעיף א'

נתונה סדרה של מספרים ממשיים a_1, a_2, \dots, a_n . תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת סידרה מונוטונית לא יורדת באורך מקסימאלי (האיברים בתת הסדרה אינם צריכים להיות סמוכים בסדרה המקורית, אך צריכים להשאר באותו הסדר כמו בסדרה המקורית).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב'

נסמן את אורך תת הסידרה שנמצאה בסעיף הקודם בתור k . תארו אלגוריתם יעיל לחישוב מספר תתי הסדרות (המונוטוניות לא יורדות) באורך k .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 4**סעיף א'**

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, זוג קודקודים $s, t \in V$, ופונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. בנוסף, ידוע שאין בגרף מעגלים שליליים. תארו אלגוריתם יעיל המוצא מבין המסלולים הקצרים ביותר (ביחס למספר הקשתות) מ- s ל- t מסלול קל ביותר ביחס ל- w .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב'

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, זוג קודקודים $s, t \in V$, ושתי פונקציות משקל $w, w' : E \rightarrow \mathbb{R}$. בנוסף, ידוע שאין בגרף מעגלים שליליים, גם לפי משקלי w וגם לפי משקלי w' . תארו אלגוריתם יעיל אשר מוצא, מבין המסלולים הקלים ביותר מ- s אל t לפי פונקציית המשקל w , מסלול קל ביותר מ- s אל t לפי פונקציית המשקל w' .

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 5

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$ וקבוע שלם k . תארו אלגוריתם יעיל למציאת תתי־קבוצה $U \subseteq V$ בגודל k אשר מקיימת את התכונות הבאות. לכל קודקוד $v \in V \setminus U$ קיים קודקוד $u \in U$ כך שישנו מסלול מכוון מ־ v אל u , ובנוסף לא קיים מסלול מכוון בין שני איברים שונים של U . אם לא קיימת תתי־קבוצה מתאימה, על האלגוריתם להתריע על כך.

יעילות:

אלגוריתם והסבר: