

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' תשס"ז, מועד א'

תאריך: 12.7.07

מרצים: נוגה אלון ומיכה שריר

מתרגלים: סבטלנה אולונצקי ודן פלדמן

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.

במבחן 6 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 5 מהשאלות יזכו אותך ב- 90 נקודות, ותשובות נכונות על כל השאלות ב- 100 נקודות.
- התשובה לכל שאלה מורכבת מכמה חלקים, שעל כל אחד מהם להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים, ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, אך יש למסרה.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות שמתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת אז הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות).

בהצלחה!

שאלה 1

נתון גרף מכוון $G=(V, E)$, המיוצג ע"י רשימות שכנות.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, המחשב את הקבוצה $U \subseteq V$ של כל הצמתים u , בעלי התכונה

שלכל $v \in V$ קיימת מסילה מכוונת מ- u ל- v .

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

שאלה 2

יהא $G=(V, E)$ גרף לא מכוון מיוצג ע"י רשימות שכנות, עם משקל שלם $w(e)$ לכל קשת $e \in E$. נתונה

קשת $f \in E$.

(א) הוכיחו את הטענה הבאה: קיים עץ פורש מינימלי של G שאינו מכיל את f אם"ם f שייכת

למעגל בגרף $G^{(f)}=(V, E^{(f)})$, כאשר $E^{(f)}=\{e \in E \mid w(e) \leq w(f)\}$.

(ב) תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, הבודק אם קיים עץ פורש מינימלי של G שאינו מכיל את

f .

(א) הוכחה:

(ב) יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

נתון גרף לא מכוון $G=(V, E)$ המיוצג ע"י רשימות שכנות, וצומת $s \in V$. לכל קשת $e \in E$ יש משקל שלם $w(e)$ (חיובי או שלילי). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב, לכל צומת $v \in V$, את המשקל המינימלי של מסלול מ- s ל- v בעל מס' זוגי של קשתות. (הניחו שב- G אין מעגלים שליליים).

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

שאלה 4

בקרב המורונים גבר יכול להיות נשוי לארבע נשים לכל היותר, אך אישה יכולה להיות נשואה לגבר אחד לכל היותר.

נתון גרף דו-צדדי $G=(M, W, E)$ הנתון ע"י רשימות שכנות, כאשר M - קב' הגברים, W - קב' הנשים, וכל קשת $(u,v) \in E \subseteq M \times W$ מתארת זיווג אפשרי בין הגבר u והאישה v . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב "זיווג" מקסימלי ב- G , כלומר קבוצת קשתות בגודל מקסימלי, המקיימת את אילוצי הנישואים בקהילה המורונית.

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

שאלה 5

נתונה קבוצה של n מספרים שלמים $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2$ ומספר שלם נוסף m . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב את מסי הפתרונות למשוואה $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = m$, כאשר $x_i \in \{0, 1, 2\}$ לכל i .

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר:

שאלה 6

נתונה מחרוזת T של n תווים ותבנית P של m תווים. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק אם קיימות מחרוזות x, y , ורישא (לא ריקה) P' של P , כך ש- $T = xP'y$ וגם מתקיים $|y| < 2|P'|$

יעילות:

אלגוריתם:

הסבר: