ת.ז.: __________ מס' מחברת: _____

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תשס"ו, מועד א'

תאריך: 10.2.06

מרצה: פרופ' יוסי עזר

מתרגלת: ורה אסודי

משך הבחינה: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר.

במבחן 6 שאלות. יש לענות על כולן.

תשובות נכונות ומלאות על 5 מהשאלות יזכו אותך ב- 90 נקודות,

ותשובות נכונות על כל השאלות ב- 100 נקודות.

התשובה לכל שאלה מורכבת ממספר חלקים, שעל כל אחד מהם להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים, ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.

התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהוכחת נכונות וניתוח הסיבוכיות.

מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, אך יש למסרה.

בהצלחה!

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 1

נתונה סדרת מספרים טבעיים $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

א. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא תת-סידרה (לאו דווקא רצופה) מונוטונית לא יורדת בעלת סכום מקסימלי. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

ב. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר בהינתן גם מספר טבעי k מוצא תת-סידרה (לאו דווקא רצופה) מונוטונית לא יורדת באורך לכל היותר k בעלת סכום מקסימלי. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

שאלה 2

א. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שקובע האם ניתן לתת לכל קשת $e\in E$ משקל $w(e)\in\{0,-1\}$, כך שלכל היותר k קשתות יקבלו משקל 0 ושלא יהיה בגרף מעגל שלילי. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

ב. בהינתן גרף והשמת משקלים כמתואר בסעיף א', וצומת $s\in V$, תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר מוצא את המרחקים מ- s לכל $v\in V$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 3

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר, עם משקלים $w:E\rightarrow R^+$.

א. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר בהינתן צומת $u\in V$ מוצא מבין העצים הפורשים המינימלים עץ T שעבורו $d_T(u)$ מקסימלי, כאשר $d_T(u)$ זו דרגת u בעץ T. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

ב. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר בהינתן שני צמתים $u,v \in V$ מוצא מבין העצים הפורשים המינימלים עץ T שעבורו $d_T(u)$-$d_T(v)$ מקסימלי. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 4

נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s, בור t, וקיבולים שלמים על הקשתות. כמו כן נתונה זרימה מקסימלית f וקבוצת קשתות $e_1,e_2,\ldots,e_k\in E$. נניח שמגדילים את הקיבולים של $e_1,e_2,\ldots,e_k$ ב- $1/2$. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא זרימה מקסימלית חדשה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

שאלה 5

נתונים מחרוזת P באורך m, טקסט T באורך n, ומספר $1 \le k \le m-6$.
שינוי תו הוא החלפתו בתו אחר מה-א"ב.
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע אם ניתן לשנות את התוים $P[k],P[k+1],\ldots,P[k+6]$ או חלק מהם כך שתהיה הופעה של P בתוך T. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

סיבוכיות:

אלגוריתם:

הוכחה:

ת.ז.: ___________ מס' מחברת: _____

שאלה 6

א. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, מקור s_i, בור t_i ודרישה d_i לכל $1 \le i \le k$, ולכל קשת $e \in E$ קיבול $c(e) \in R^+$ ועלות $b(e) \in R^+$ ליחידת זרימה בקשת. המטרה היא להזרים d_i יחידות זרימה מסוג i מ- s_i ל- t_i לכל $1 \le i \le k$, כך שסך כל הזרימה על כל קשת לא תחרוג מהקיבול שלה, וכך שהעלות הכוללת של הזרימה תהיה מינימלית.
כתבו תוכנית לינארית המוצאת פיתרון.

תוכנית לינארית:

מס' מחברת: _____ ת.ז.: ___________

ב. נתונה קבוצה V ושלשות $e_i=(a_i,b_i,c_i)$, $a_i,b_i,c_i \in V$, עבור $1 \le i \le m$. המטרה היא למצוא תת-קבוצה $S \subseteq V$ מגודל מינימלי כך שלכל $1 \le i \le m$ לפחות אחד מבין האיברים a_i, b_i ו- c_i שייך ל- S.

תארו אלגוריתם קרוב יעיל המשיג יחס קרוב טוב ככל האפשר לבעיה ונתחו את יחס הקרוב.

יחס הקרוב:

אלגוריתם:

הוכחה: