ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

מבחן בתורת הגרפים

סמסטר א' תשס"ז, מועד א'

תאריך: 9.2.2007

מרצה: נוגה אלון

משך הבחינה: 3 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר.
במבחן 6 שאלות, יש לענות על כולן. תשובות נכונות ומלאות על 5 מהשאלות יזכו אותך ב- 90 נקודות, ותשובות נכונות על כל 6 השאלות ב- 100 נקודות.
התשובה לכל שאלה מורכבת מחלק אחד או שניים, שעל כל אחד מהם להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים, ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מספר הסטודנט/ית על טופס הבחינה. וודא/י היטב את תשובתך לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
התשובה לכל שאלה חייבת להיות מלווה בהסבר מתאים.

בהצלחה!

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 1

יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט וקשיר, ובו צומת $v \in V$ מדרגה $d_G(v)=15$. הוכח/י שיש ל-G תת-גרף פורש $H=(V,E')$ כך שלכל צומת $u \in V$ מתקיים $\left\lceil \frac{d_G(u)}{2} \right\rceil \le d_H(u) \le \left\lfloor \frac{d_G(u)}{2} \right\rfloor$, כאשר כאן $d_H(u)$ מסמן את דרגת u בגרף H, ו-$d_G(u)$ את דרגת u בגרף G.

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 2

יהא G גרף פשוט בעל מספר צביעה $\chi(G)=k$. הוכח/י שיש ב-G לפחות k צמתים שדרגתם לפחות k-1.

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

<u>שאלה 3</u>

יהא G גרף דו-צדדי עם קבוצות צמתים A,B ונניח שלכל צומת $a\in A$ יש דרגת חיובית גדולה או שווה מדרגתו של כל אחד משכניה. הוכח/י כי יש ב-G זיווג המרווה את כל צמתי A.

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 4

נסח/י והוכח/י את משפט Dirac (על קיום מעגל המילטון).

משפט Dirac:
הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 5

עבור גרף פשוט $G=(V,E)$ נסמן ב-$G^{(2)}$ את הגרף שצמתיו אוסף הזוגות הסדורים $V\times V=\{(u,v):u,v\in V\}$ ובו (u_1,v_1) מחובר ל-(u_2,v_2) אם ורק אם $\{u_1,u_2\}\in E$ ו/או $\{v_1,v_2\}\in E$. נניח כי ב-G אין קליק בגודל k. הוכח/י כי ב-$G^{(2)}$ אין קליק בגודל 4^k.

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

שאלה 6

יהא $G=(V,E)$ גרף מישורי פשוט ותהא נתונה חלוקה של V ל-m קבוצות זרות בזוגות של צמתים $V=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_m$, $S_i\cap S_j=\phi$ לכל $1\le i<j\le m$, כאשר $|S_i|=3$ לכל i. הוכח/י שיש פונקציה $f:\{1,2,\ldots,m\}\to\{1,2,\ldots,18\}$ כך שלכל $i\neq j$, עבורם יש קשת שקצותיה ב-S_i וב-S_j, מתקיים $f(i)\neq f(j)$.

הוכחה:

ת.ז.: ____________ מס' מחברת: _____

<u>לשימוש במקרה "חירום":</u>

תשובה לשאלה: _____

תשובה:

הסבר:

תשובה לשאלה: _____

תשובה:

הסבר:

בהצלחה!