

חלק 1

נתונה מטריצת הסתברויות מעבר הבאה:

	1	2	3	4	5	6	7
1	1/4	3/4	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1/2	0	1/2	0	0	0
4	0	0	1/2	0	1/2	0	0
5	0	0	0	1/2	0	1/2	0
6	0	0	0	0	0	1/2	1/2
7	0	0	0	0	0	1/4	3/4

1. א. המטריצה אי פריקה ולא מחזורית

ב. כל המצבים נשנים אפס.

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{5,6}^{(n)} = 1/4$

2. תהי $x = f_{3,\{1,2\}}$ ההסתברות לעבור אי פעם ממצב שלוש לקבוצת המצבים $\{1,2\}$

א. $x = 3/4$ ב. $x = 1/2$ ג. $x = 1/4$

3. א. לסדרה $P_{3,7}^{(n)}$ $n=1,2,\dots$ לא קיים גבול.

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{3,7}^{(n)} = 1/3$ ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{3,7}^{(n)} = 1/4$

4. א. הוקטור $(2/7, 3/14, 0, 0, 0, 1/6, 1/3)$ הוא וקטור הסתברויות סטציונרי יחיד.

ב. בכל וקטור סטציונרי (π_i) $i=1,\dots,7$ $\pi_3 = 0$

ג. יש רק מספר בן מניה של וקטורים סטציונרים.

חלק 2

לתחנת שרות עם שרת אחד מגיעים בכל יחידת זמן Z צרכנים כאשר Z משתנה מקרי המפולג באופן הבא: $1/4 < \alpha < 3/4$

$$P[Z=0]=1/4, \quad P[Z=1]=\alpha, \quad P[Z=2]=3/4-\alpha$$

זמן השרות קבוע, יחידת זמן אחת.

יהי X_n מספר הצרכנים בתחנה בזמן n .

5. א. רק עבור $\alpha = 1/2$ היא שרשרת מרקוב נשנת אפס.

ב. עבור כל $1/4 < \alpha \leq 1/2$ היא נשנת אפס.

ג. עבור כל $1/4 < \alpha < 3/4$ השרשרת נשנת חיובית.

6. עבור כל α מתקיים:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(n)} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,0}^{(n)}$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(n)} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,0}^{(n)}$

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(n)} = 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,0}^{(n)}$

7. עבור $\alpha = 5/8$ נסמן וקטור סטציונרי $(\pi_i)_{i=0,1,2,\dots}$

א. מתקיים עבור $n \geq 2$ $\pi_n = 1/2 \cdot \pi_{n-1}$

ב. מתקיים עבור $n \geq 2$ $\pi_n = 2/3 \cdot \pi_{n-1}$

ג. מתקיים עבור $n \geq 3$ $\pi_n = 1/2 \cdot \pi_{n-1}$

8. עבור $\alpha = 5/8$

א. $\pi_0 = 1/3$ ב. $\pi_1 = 1/2$ ג. $\pi_0 = 1/4$

חלק 3

$X(t)$ הוא תהליך פואסון לא הומוגני עם פונקצית עוצמה $\lambda(t) = 2t$

$$P[X(t+h) = X(t)] = 1 - 2t \cdot h + o(h)$$

$$9. Y = X(2) - X(1)$$

א. Y הוא משתנה מעריכי עם פרמטר 3

$$ב. P[Y=1] = 4 \cdot e^{-4}$$

$$ג. P[Y=2] = 4.5 \cdot e^{-3}$$

10. בהינתן $X(2) = 1$ ההתפלגות המותנה של $t_1 =$ זמן המופע הראשון, היא בעלת צפיפות $f(x)$

$$א. f(x) = x/2 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$ב. f(x) = x/4 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$ג. f(x) = 3 \cdot x^2/8 \quad 0 \leq x \leq 2$$

11. בהינתן $X(2) = 2$ פונקצית הצפיפות של t_1 מקיימת

$$א. f(x) = x^2(4-x)/4 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$ב. f(x) = x(4-x)/8 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$ג. f(x) = x(4-x^2)/4 \quad 0 \leq x \leq 2$$

12. בהינתן $X(1) = 1$ יהי t_2 זמן ההתרחשות השניה

$$א. P(t_2 > 2) = e^{-2}$$

$$ב. P(t_2 > 2) = e^{-3}$$

$$ג. P(t_2 > 2) = 1 - e^{-3}$$

חלק 4

$X(t)$ הוא תהליך מרקוב הומוגני בזמן רציף המקביל ערכים שלמים אי שליליים $\lambda > 0, 0, 1, 2, \dots$ קבוע ומתקיים

$$n=1,2,\dots \quad P[X(h)=n \mid X(0)=n] = 1 - (1+\lambda) \cdot h + o(h)$$

$$P[X(h)=n+1 \mid X(0)=n] = \lambda h + o(h)$$

$$P[X(h)=n-1 \mid X(0)=n] = o(h)$$

עבור $n=0$ מתקיים

$$P[X(h)=0 \mid X(0)=0] = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P[X(h)=1 \mid X(0)=0] = \lambda h + o(h)$$

13. בהינתן $[X(0)=3]$ יהי הזמן עד לשינוי הערך של $X(0)$.

א. $P[t_1 > 1] = e^{-1+\lambda}$. ב. $P[t_1 > 1] = e^{-\lambda-1}$. ג. $P[t_1 > 1] = e^{-1-\lambda}$.

14. לתהליך המרקובי הנ"ל קיימת התפלגות סטציונרית.

א. אם $\lambda < 1$. ב. אם $\lambda \geq 1$. ג. $\lambda > 1$.

15. יהי (π_0, π_1, \dots) וקטור הסתברויות סטציונרי נתון $\pi_0 = 1/4$ אז הערך של λ הוא

א. $\lambda = 1/2$. ב. $\lambda = 3/4$. ג. $\lambda = 3/2$.

16. עבור כל λ שעבורו קיים וקטור סטציונרי מתקיים:

א. $\pi_1 = \lambda \cdot \pi_0$. ב. $\pi_1 = (1+\lambda) \cdot \pi_0$. ג. $\pi_0 = \pi_1$.

חלק 5

X_n $n=0,1,2$ הוא תהליך הסתעפות

התפלגות מסי' הצאצאים Z של פרט באוכלוסיה היא $P[Z=0]=P[Z=1]=P[Z=3]=1/3$

17. בהינתן $X_0=1$ הסתברות ההכחדה היא

א. $3/4$

ב. 1

ג. הפתרון החיובי של המשוואה $x^2+x-1=0$

18. בהינתן ש $X_0=1$ ההסתברות $P[X_2=0] = a$

א. $a=37/81$ ב. $a > 1/2$ ג. $a < 1/3$

19. $X_0=1$. יהי a כמו בשאלה 18. נסמן $b=P[X_1=1 | X_3=0]$

א. $b=a/(1+a)$ ב. $b=a^2/(1+a)$ ג. $b=a/(1+a^3)$

20. בהינתן שהתפלגות Z היא:

$$P[Z=0]=P[Z=1]=P[Z=2]=1/3$$

א. בהינתן $X_0=1$ הסתברות ההכחדה היא $2/3$.

ב. בהינתן $X_0=2$ הסתברות ההכחדה היא $9/16$.

ג. כאשר $X_0=1$ השונות $\text{Var}(X_n) = (2/3)n$.