פתרון מקוצר לבחינה מ 11/10/11

שאלה 1

א נתן דוגמא נגדית.
שרשרת מרקוב מחזורית בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ב נוכיח את הטענה.
עבור כל מצב i חולף מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i) < \infty$. לכן אילו כל המצבים $1 \le i \le 16$ היו חולפים
אז היה מתקיים $\sum_{i=1}^{16}\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i) < \infty$. זו סתירה לכך שמכיון ש $E(X_n) < 8$ לכל n , אז
מתקיים לפי אי שיוויון מרקוב $P(X_n \le 16) > 0.5$ לכל n.

ג נתן דוגמא נגדית.
שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

מתקיים עבור כל $n \ge 0$:

$$E(X_{n+1}) = P(X_{n+1}=1)\cdot 1 + P(X_{n+1}=2)\cdot 2 = 1 + P(X_{n+1}=2) = 1 + 0.1(1 - P(X_n = 2)) +$$
$$+ 0.5P(X_n = 2) = 1.1 + 0.4P(X_n = 2)$$

ומכיון ש $P(X_1 = 2) > P(X_0 = 2) = 0$ אז נקבל באינדוקציה
ש $1.1 + 0.4P(X_n = 2) > 1.1 + 0.4P(X_{n-1} = 2)$ לכל $n \ge 1$, כך סדרת התוחלות היא
מונוטונית עולה. אך זו שרשרת בלתי פריקה של מצבים נשנים.

ד נתן דוגמא נגדית.
הדוגמא תהיה של שרשרת בלתי פריקה ונשנית אפס על הטבעיים.
$P_{1,2} = 1$ ועבור כל $i \ge 2$: $P_{i,i-1} = 0.5 = P_{i,i+1}$. עבור כל מצב i מתקיים $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = 0$
.

ה נתן דוגמא נגדית.
שרשרת מרקוב בלתי פריקה על כל החזקות (חיוביות, שליליות ואפס) של 2.
נניח שמתקיים $P(X_{n+1} = 2t \mid X_n = t) = 0.2 = 1 - P(X_{n+1} = 0.5t \mid X_n = t)$

$$E(X_{n+1}) = 0.2E(2X_n) + 0.8E(X_n/2) = 0.8E(X_n)$$

שימו לב שאילו היינו בוחרים למשל $\frac{1}{3}$ במקום 0.2 אז הגבול של התוחלות לא היה 0, למרות שגם במקרה זה יש שאיפה של המשתנים ל 0 בהסתברות 1.

<u>שאלה 2</u>

תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט גדולה מ 1. בהינתן $(X_0 = 1)$, הסתברות ההכחדות היא הפתרון החיובי הקטן של המשוואה $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$. פתרון זה הוא $t = 0.5$.

<u>א</u> אם $(X_0 = 2)$ אז הסתברות ההכחדות היא 0.5^2 . לכן התשובה היא $0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5^2$

<u>ב</u> בהינתן ערכו של X_3 , כל המידע על ההיסטוריה הקודמת יותר אינו רלונטי. לכן סכויי ההכחדות הם 0.5^6 .

<u>ג</u>

$$\frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$$

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u> לפי התכונות של זרם פואסוני מתפצל, זרם המגיעים לעידו הוא פואסוני עם עצמה 1. מתקיים: $\Lambda_{0,1} = 1$, $\Lambda_{0,0} = -1$ ועבור כל $i \ge 1$: $\Lambda_{i,i-1} = \Lambda_{i,i+1} = 1$ ו $\Lambda_{i,i} = -2$.

(ניתן לראות לפי התכונות של תהליך פואסון, שזרם המגיעים לעידו הוא תהליך פואסון עם עצמה 1).

<u>ב</u> נראה ש $\lim_{n\to\infty} P(X(t) = 0) = 0$.

$X(t)$ היא שרשרת של תור עם שרת יחיד המשרת בקצב 1 שאליו מגיעים לקוחות בקצב של 1 , כאשר יש אינסוף מקומות המתנה. לשרשרת בלתי פריקה זו אין וקטור סטציונרי.

<u>ג</u> בגלל התכונות של זרם פואסוני מתפצל, זרם המגיעים לכל כספר הוא פואסוני בעצמה 1 ויש אי תלות בין הקורה אצל כספרים שונים. כאשר בתהליך המשקף את הקורה בכל הסניף יש n קפיצות, אז בתהליך המשקף את הקורה אצל כל כספר בנפרד יש גם סדר גודל של n קפיצות. כך ההסתברות שכספר מסוים פנוי מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$. התהליך המתאר את הקורה אצל כל כספר הוא שרשרת מרקוב הומוגנית.

מכיון ש $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ אז אינסוף פעמים יהיה כספר אחד פנוי.

מכיון שהתהליך המתאר את מספר הלקוחות הנמצאים אצל זוג כספרים הוא שרשרת מרקוב ומכיון ש $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$ אז אינסוף פעמים יהיו שני כספרים פנויים.

מכיון ש $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 < \infty$ אז רק במספר סופי של פעמים יהיו שלושה כספרים פנויים.

ד אף פעם לא יגיעו שני לקוחות בדיוק באותה נקודת זמן. מכיון שכל לקוח יפנה לכספר שאצלו נמצאים מספר מכסימלי של לקוחות, אז אף פעם לא יהיה יותר מכספר אחד עסוק. כך המערכת לא תעמוד בקצב המגיעים. כך ישאף מספר הלקוחות הנמצאים אצל אחד הכספרים ל ∞.

משיקולי סימטריה נקבל $\lim_{t\to\infty} P\left(X\left(t\right)=0\right)=\frac{2}{3}$.

שלומי