פתרון הבחינה מ 27/9/05

שאלה 1

א. נסתכל על שרשרת מרקוב שבה שני המצבים הם שהן יודעות ושהן לא יודעות את הסיסמא לאחר פגישה. מטריצת המעבר של שרשרת זו היא

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המצב שהן יודעות את הסיסמא הוא חולף. לכן לאחר מספר גדול של שבועות בהסתברות גבוהה הן כבר לא ידעו לעולם את הסיסמא. ההסתברות המדויקת שהן ידעו את הסיסמא לאחר 100 שבועות היא

$\left(\frac{7}{8}\right)^{100}$. זאת הסתברות שקרובה לאפס.

ב. נתייחס לשרשרת מרקוב שבה המצבים הם:
1. יודעות לאחר הפגישה.
2. שכחו בשבוע האחרון.
3. שכחו בשבוע שלפני האחרון.
4. שכחו לפני שבועיים.

מטריצת המעבר היא
$$\begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת היא מטריצת מעבר של שרשרת אי פריקה מסדר סופי שבה כל המצבים הם לא מחזוריים. (ניתן לעבור ממצב 1 לעצמו בצעד אחד, לכן מצב 1 הוא לא מחזורי. אי מחזוריות היא תכונה מחלקתית.)
בשרשרת כזאת לגבי כל מצב, קיימת לו הסתברות גבולית ששווה להסתברות הסטציונרית שלו.

בשרשרת זאת ההסתברות הסטציונרית של מצב 1 היא $\frac{8}{11}$. זאת היא בקירוב ההסתברות שבסוף הפגישה ה-100 הן ידעו את הסיסמא.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. כן

סדרת המשתנים $\{b_n\}$ היא סדרת משתנים שווי התפלגות, חסומים ובלתי תלויים. על סדרה כזאת חל החוק החזק של המספרים הגדולים. לכן מתקיים $P\left(\bigcap_{w=1}^{\infty}\bigcup_{m=w}^{\infty}\left(\left|\frac{\sum_{n=1}^{m}b_n}{m}-E(b_1)\right|>\varepsilon\right)\right)=0$

לכל $\varepsilon>0$. מתקיים $E(b_1)=\frac{1}{3}\cdot(-4)+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 6=\frac{4}{3}$. לכן סדרת הממוצעים תשאף ל $\frac{2}{3}$, לכן מספר הפעמים שהממוצע והסכום יהיו שווים לאפס הוא סופי. לכן אם מתחילים במצב 0 אז מספר הביקורים בו יהיה סופי. מכיוון שמדובר בשרשרת בלתי פריקה אז כל המצבים הם חולפים.

<u>ב</u>. לא

החוק החלש של המספרים הגדולים חל על כל סדרה שעליה חל החוק החזק. לכן אם מתחילים במצב 0 אז כאשר $n\to\infty$, ההסתברות להיות במצב 0 בשלב ה-n שואפת לאפס. זה אומר שהמצב 0 אינו נשנה חיובי. אך זה לא אומר שלא נבקר במצב 0 אינסוף פעמים. לכן זה לא אומר אם מצב 0 הוא חולף או נשנה אפס.

<u>שאלה 3</u>

נפריך את שתי הטענות. שימו לב שלא נאמר שהתהליכים הם בלתי תלויים. לכן ניתן היה לתת דוגמאות עם תהליכם תלויים. אך נתן דוגמאות עם תהליכים בלתי תלויים.

<u>א</u>. נניח שלכל פרט יש 0 או 1 או 2 צאצאים. יש לו 0 צאצאים בהסתברות $\frac{1}{a}$, שני צאצאים בהסתברות $\frac{1}{a^2}$ וצאצא אחד בהסתברות $1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}$ ($1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}>0$). מכיוון שתוחלת מספר הצאצאים של כל פרט קטנה מ 1 אז השושלות יכחדו בהסתברות 1 עבור כל a מתאים. אבל אם נשאיף את a ל ∞, אז בכל דור שבו עדיין אין הכחדות, הסיכוי להכחדות מידית בדור הבא שואפת לאפס. לכן ההסתברות שהשושלת השניה תכחד בדיוק בדור שבו הראשונה נכחדת שואפת לאפס. לכן כאשר $a\to\infty$ ההסתברות שהשושלות יכחדו בדורות שונים שואפת ל 1. משיקולי סימטריה ההסתברות שהראשונה תכחד לפני השניה שואפת ל 0.5.

<u>ב</u>. נניח שבכל אחת משתי השושלות יש לגבי כל פרט הסתברות של 0.5 ל 0 צאצאים והסתברות של 0.5 ל m צאצאים. עבור כל $m>2$ ההסתברות שלא תהיה אף פעם הכחדות היא גדולה מ 0. לכן כאשר $m\to\infty$ אם אין הכחדות מיד בהתחלה אז בהסתברות ששואפת ל 1 לא תהיה כבר הכחדות. לכן לגבי כל שושלת ההסתברות שהיא תכחד תשאף ל 0.5. ההסתברות שהיא תכחד ושהשניה לא תכחד כבר באותו שלב תשאף ל $0.5\cdot 0.5=0.25$ כאשר $m\to\infty$.

שאלה 4

א. המצבים הם $\{1,2,3,4,5,6\}$. מצבים 1,3,6 הם חולפים כי יש מהם מעבר למצבים אחרים ואין דרך חזרה אליהם. יתר המצבים מהווים מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים (מכל אחד מהם יש מסלול לכל אחד מהאחרים והשרשרת היא שרשרת סופית).

ב. כאשר מגיעים למצבים הנשנים, לא עוזבים אותם יותר. היוצר האינפיניטיסימלי במחלקת הנשנים היחידה הוא

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & -6 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -6 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & -4 \end{array}$$

מכל אחד משני המצבים האחרים עצמת המעבר למצב 4 היא זהה ושווה ל 2. מתקיימת משוואה דיפרנציאלית: $P'_{4,4}(t)=-6P_{4,4}(t)+2(1-P_{4,4}(t))$ לכן $P'_{4,4}(t)=-8P_{4,4}(t)+2$.

משפחת הפתרונות של המשוואה הזאת היא $P_{4,4}(t)=ce^{-8t}+\frac{1}{4}$. נשתמש בתנאי התחלה $P_{4,4}(0)=1$ ונקבל $c=\frac{3}{4}$. מתקיים $P_{4,4}(t)=\frac{3}{4}e^{-8t}+\frac{1}{4}$.

ג. לגבי המצבים החולפים, אחר איזשהו זמן סופי יותר לא נבקר בהם. לכן לגבי המצבים החולפים, שני הגבולות שווים לאפס והם זהים.

מבין המצבים הנשנים, כל שהות במצב 5 תהיה ארוכה יותר בממוצע משהויות בשני המצבים האחרים (במצב 5, פרק שהות אחד הוא בעל התפלגות מעריכית עם פרמטר 4 ובשני המצבים האחרים, פרק שהות אחד הוא בעל התפלגות מעריכית עם פרמטר 6). לכן במצב 5, ההסתברות הגבולית להיות בו תהיה גבוהה יותר מההסתברות הגבולית להיות בו בזמני הקפיצות. בשני המצבים האחרים, פרק של שהות הוא בעל אותו אורך ממוצע והוא קצר יותר משהות ממוצעת במצב (הממוצעת היא שקלול של זמני השהויות הממוצעות בשלושת המצבים). לכן לגבי המצבים 2 ו 4, ההסתברויות הגבולית יהיו קטנות מההסתברויות הגבוליות בזמני הקפיצות.

שלומי