

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.

ענו על כל השאלות. סך כל הנקודות הוא 110. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם.

בהצלחה!

שאלה 1 (28 נקודות)

אילה, דנה וליאת נפגשות בתחילת כל שבוע. בפגישתן הראשונה הן מקבלות סיסמא זהה. במשך כל שבוע, כל אחת מהן שוכחת את הסיסמא בהסתברות 0.5, באופן בלתי תלוי באחרות. בכל פגישה, אם יש ביניהן שזוכרות את הסיסמא אז הן מזכירות אותה לאלה מביניהן ששכחו את הסיסמא במשך השבוע הקודם. אם באחת הפגישות אף אחת לא זוכרת את הסיסמא, אז הסיסמא נאבדת לתמיד.

- (6) א. מהי בקירוב ההסתברות שבסוף הפגישה ה-100 הן ידעו את הסיסמא?
(22) ב. בסעיף זה נניח שאם בתחילת שבוע מסוים אף אחת לא זוכרת את הסיסמא, אז בפגישתן כעבור 3 שבועות הן מקבלות שוב את הסיסמא.
מהי בקירוב, במקרה זה, ההסתברות שבסוף הפגישה ה-100 הן ידעו את הסיסמא?

שאלה 2 (28 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים $-\infty < i < +\infty$. מתקיים: $X_0 = 0$ ולכל $n \geq 0$: $X_{n+1} = X_n + b_n$, כאשר b_n הם משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $P(b_n = -4) = P(b_n = +2) = P(b_n = +6) = \frac{1}{3}$; זאת אומרת שבכל שלב בסיכוי $\frac{1}{3}$ עושים ארבע צעדים שמאלה, בסיכוי $\frac{1}{3}$ עושים שני צעדים ימינה ובסיכוי $\frac{1}{3}$ עושים שישה צעדים ימינה.

- (14) א. האם ניתן למיין את מצבי השרשרת על-ידי שימוש בחוק החזק של המספרים הגדולים? אם כן, אז מיינו את מצבי השרשרת על-ידי שימוש בחוק זה. אם לא, אז מה ניתן בכל זאת לקבוע לגבי מצבי השרשרת על-ידי שימוש בחוק זה?
(14) ב. האם ניתן למיין את מצבי השרשרת על-ידי שימוש בחוק החלש של המספרים הגדולים? אם כן, אז מיינו את מצבי השרשרת על-ידי שימוש בחוק זה. אם לא, אז מה ניתן בכל זאת לקבוע לגבי מצבי השרשרת על-ידי שימוש בחוק זה?

שאלה 3 (18 נקודות)

הוכיחו או הפריכו, על-ידי מתן דוגמא נגדית, את כל אחת מהטענות הבאות. דוגמא נגדית צריכה להיות דוגמא מפורשת של סדרות של תהליכי הסתעפות מתאימים.

(9) א. לא קיימים שני תהליכי הסתעפות כך שלגבי כל אחד מהם ההסתברות שקיים שלב שבו הוא נכחד והשני עדיין לא נכחד (או לא יכחד כלל) קרובה ל 0.5 עד כדי ε עבור כל $\varepsilon > 0$.

(9) ב. לא קיימים שני תהליכי הסתעפות כך שלגבי כל אחד מהם ההסתברות שקיים שלב שבו הוא נכחד והשני עדיין לא נכחד (או לא יכחד כלל) קרובה ל 0.25 עד כדי ε עבור כל $\varepsilon > 0$.

שאלה 4 (36 נקודות)

נתון יוצר אינפיניטיסימלי של שרשרת מרקוב בת שישה מצבים:

-8	1	4	1	1	1
0	-6	0	2	4	0
2	1	-9	2	0	4
0	3	0	-6	3	0
0	2	0	2	-4	0
2	3	1	0	2	-8

(8) א. מיינו את מצבי השרשרת.

(14) ב. בחרו את אחד ממצבי השרשרת, i , ועבור מצב זה מצאו את $P_{i,i}(t)$ עבור כל t סופי.

(14) ג. לגבי כל אחד ממצבי השרשרת, קבעו אם ההסתברות הגבולית של המצב היא גדולה, קטנה או שווה להסתברות הגבולית של מצב זה בזמני הקפיצות. נמקו את תשובתכם ללא חישוב של הסתברויות גבוליות.