מועד א' סמסטר א' תשס"ה
13/2/05

# בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
ענו על כל השאלות. סך כל הנקודות הוא 110. הצובר $N$ נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$ .
נמקו את תשובותיכם.

בהצלחה !

---

**שאלה 1** **( 28 נקודות )**

נתונה מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $I=\{1,2,3,4,5\}$ .

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.2 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 |

(6) **א.** מיינו את מצבי השרשרת.

(10) **ב.** עבור כל זוג מצבים $(i,j)$ חשבו $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$ .

(6) **ג.** עבור כל מצב חולף, מצאו את תוחלת זמן ההקלטות בקבוצה של מצבים נשנים.

(6) **ד.** בהינתן שמתחילים במצב 2, מצאו את התפלגות מספר המצבים השונים שבהם מבקרים בהמשך לפחות פעם אחת.

---

**שאלה 2** **( 23 נקודות )**

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים $-\infty<i<+\infty$ . מתקיים: $X_0=0$
ולכל $n\ge 0$ : $X_{n+1}=X_n+b_n$ , כאשר $b_n$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים

$P(b_n=+2)=\frac{1}{3}$ ו $P(b_n=-1)=\frac{2}{3}$ ; זאת אומרת שבכל שלב בסכוי $\frac{1}{3}$ עושים שני צעדים ימינה ובסכוי $\frac{2}{3}$ עושים צעד אחד שמאלה.

(5) **א.** מהו המחזור של מצבי השרשרת ?

(12) **ב.** הוכיחו שכל המצבים הם נשנים.

( רמז: תוכלו אם תרצו, להעזר בנוסחת סטרלינג: $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ . )

(6) **ג.** האם מצבי השרשרת הם נשנים חיובית או שהם נשנים אפס ?

---

**שאלה 3** ( 27 נקודות )

תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$P(X_i = 1) = \frac{1}{3}$ , $P(X_i = 0) = \frac{2}{3}$ לכל $i \geq 1$ . יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים $X_1, X_2, X_3, \cdots$ .

(1) **א**. הראו שכל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$ יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$ עבור איזשהו $n$ טבעי.

(2) **ב**. הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$ , אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$ , יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.

(6) **ג**. הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ $\frac{1}{3}$ לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

(6) **ד**. הראו שהמנה $\frac{1}{3}$ תתקבל אינסוף פעמים בהסתברות 1 .

( רמז: תוכלו להסתמך על הטענה שהיה צריך להוכיח בסעיף ב' משאלה 2 וזאת גם אם לא הצלחתם להוכיח אותה. )

(6) **ה**. הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

(6) **ו**. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

---

**שאלה 4** ( 32 נקודות )

החל מזמן אפס, מגיעים לקוחות לתחנת שרות בזרם פואסוני בעל עצמה ממוצעת $\lambda = 1$ ליחידת זמן. בתחנה יש שרת אחד היכול לשרת ברגע נתון לכל היותר לקוח אחד. בתחנה יש אינסוף מקומות המתנה. לקוח המגיע כאשר השרת עסוק מצטרף לתור הממתינים.

$\mu(t)$ הוא משתנה מקרי המקבל ערכים טבעיים. עבור כל $k$ טבעי, כאשר $\mu(t) = k$ אז שרות של לקוח מסתיים בפרק זמן באורך $h$ בהסתברות $kh + o(h)$ . ברגע נתון $t$ , $\mu(t)$ שווה למספר המכסימלי של לקוחות שהיו בו זמנית בתחנה עד זמן $t$ . שימו לב ש $\mu(t)$ לעולם אינו יורד, שהשרת יכול להעשות זריז יותר בממוצע, שכל שרות שניתן בפרק הזמן בין הרגע הראשון שהיו בו זמנית בתחנה $n$ לקוחות לרגע הראשון שהיו בה בו זמנית $n+1$ לקוחות ניתן בקצב $n$ , ושקצבי השרות יכולים להשתנות במהלך שרות של לקוח.

יהי $X(t)$-מספר הלקוחות שבתחנה בזמן $t$ .

(9) **א**. האם אוסף המשתנים המקריים $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?
אם כן, אז מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של שרשרת זו. אם לא, אז נמקו זאת.

(9) **ב**. האם אוסף המשתנים המקריים הדו מימדיים $(X(t), \mu(t))$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?
אם כן, אז מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של שרשרת זו. אם לא, אז נמקו זאת.

(7) **ג**. האם מתקיים $\lim_{t\to\infty} P(X(t) = 0) = 1$ ?

(7) **ד**. האם מספר הפעמים שמספר הלקוחות שבתחנה יעלה מאחד לשניים הוא סופי ?

---