<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 9</u>

שלומי

בדוגמא קודמת (דומה לשאלה 3 מתרגיל 8) ראינו שההתפלגות הגבולית לאורך זמן לא בהכרח שווה להתפלגות בזמן הקפיצות.

נתן <u>דוגמא</u> נוספת
נתונה שרשרת עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ונשאל באילו מצבים ההסתברות הגבולית גבוהה מההסתברות הגבולית בזמן הקפיצות ובאילו מקרים היא נמוכה יותר או שווה לה.

במקרה זה ניתן לענות לשאלה גם ללא ביצוע חישובים. במצבים השני והשלישי נתעכב בממוצע $\frac{1}{2}$ יחידת זמן עד קפיצה. במצב הראשון נתעכב בממוצע $\frac{1}{3}$ יחידת זמן עד קפיצה. לכן כל קפיצה מהמצבים השני והשלישי לוקחת בממוצע יותר מאשר קפיצה ממוצעת וכל קפיצה מהמצב הראשון לוקחת פחות מאשר קפיצה ממוצעת. השתמשנו כאן בעובדה שהממוצע הוא שקלול של שני ערכים בלבד.
לכן ההסתברות הגבולית של המצב הראשון היא נמוכה מההסתברות הגבולית שלו בזמני הקפיצות ואילו ההסתברות הגבולית של המצבים האחרים היא גבוהה מההסתברות הגבולית שלהם בזמן הקפיצות.

<u>שאלה</u>
נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף של תהליך פואסון.
האם ההסתברות הגבולית של המצבים השונים היא קטנה, שווה או גדולה מההסתברות הגבולית שלהם בזמן הקפיצות.

<u>תשובה</u>
בתהליך פואסון כל המצבים הם חולפים. לכן לגבי כל מצב, יש זמן סופי (סופי משתנה) שהחל ממנו לא נבקר בו יותר. לכן שני הגבולות שווים לאפס.

ראינו איך לחשב הסתברויות גבוליות (סטציונריות). ננסה לחשב הסתברויות מעבר בזמן t קבוע במקרים פשוטים שבהם יש מבנים מסוימים של היוצר האינפיניטיסימלי.
ראינו שמתקיים $P'(t)=P(t)\Lambda$.
<u>דוגמא</u>
שרשרת עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

מצאו את $P_{1,2}(t)$ כאשר t הוא זמן קבוע.

הדרך <u>לפתרון</u>
מקבלים משוואה דיפרנציאלית $P'_{1,2}(t)=P_{1,1}(t)-2P_{1,2}(t)$ ויש גם תנאי התחלה $P_{1,2}(0)=0$.

הסבר לתנאי ההתחלה: כשמתחילים במצב 1 אז בזמן 0 נמצאים במצב 1. כך $P_{1,1}(0)=1$ ו $P_{1,2}(0)=0$.

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית שקושרת בין המשתנה לבין נגזרתו.
בפגישה האחרונה הוכחנו את נכונות המשוואות מסוג זה. נתן פה גם הסבר אינטואיטיבי: אם נמצאים במצב 2 אז יש "איום" לעזוב אותו בעצמה 2 ואם נמצאים במצב 1 אז נכנסים למצב 2 בעצמה 1.
נשים לב שיש גם משוואה דיפרנציאלית בעלת אותה צורה

$$P_{2,2}'(t)=P_{2,1}(t)-2P_{2,2}(t)$$

אבל $P_{2,2}(t)$ לא שווה ל $P_{1,2}(t)$ בגלל תנאי ההתחלה השונים: $P_{2,2}(0)=1$ ו $P_{2,1}(0)=0$.

הערה: מתקיים $\lim_{t\to\infty}P_{2,2}(t)=\lim_{t\to\infty}P_{1,2}=\pi_2$ אבל אין שיווין עבור t קבוע.

מכיון שיש רק שני מצבים אז מתקיים $P_{2,1}(t)=1-P_{2,2}(t)$. לכן נוכל לקבל משוואות שבכל אחת מהן יש רק משתנה אחד למשל: $P_{2,2}'=(1-P_{2,2}(t))-2P_{2,2}(t)$ ומתקבלת משוואה:

$$P_{2,2}'=1-3P_{2,2}(t)$$

נצטרך להתגבר על משוואות דיפרנציאליות מהצורה $y'=ay+b$.
נשים לב שעבור הפונקציה $y=e^{at}$ מתקיים $y'=ae^{at}$. נשתמש בעובדה זו ובעובדה שהנגזרת של קבוע היא אפס. כך אם $y=c_1e^{at}+c_2$ אז $y'=c_1ae^{at}$.

צריך לבחור מקדם c_2 כך שהאיבר החופשי יתקזז. לכן צריך להתקיים $c_2=-\frac{b}{a}$. כעת נשאלת השאלה איך לבחור את c_1 . כאן כדי לפתור את המשוואה יש לנו חופש תמרון. אם יש לנו תנאי התחלה אז צריך להתאים את בחירת c_1 לתנאי ההתחלה.

נחזור לאחת המשוואות שבהן עסקנו: $P_{2,2}'(t)=1-3P_{2,2}(t)$.

מתקיים $P_{2,2}(t)=\frac{1}{3}+c_1e^{-3t}$. מתקיים $e^{-3\cdot 0}=1$ לכן כדי לקיים את תנאי ההתחלה $P_{2,2}(0)=1$ צריך לבחור $\frac{1}{3}+c_1=1$ או $c_1=\frac{2}{3}$. לכן מתקיים $P_{2,2}(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t}$. נשים לב שכאשר $t\to\infty$ אז $P_{2,2}(t)$ שואף ל $\frac{1}{3}$ (כי $\lim_{t\to\infty}e^{-3t}=0$). זאת היא ההסתברות הסטציונרית של מצב 2. למעשה קיבלנו דרך אלטרנטיבית לחשב כאן את ההסתברות הגבולית שאותה ידענו כבר. במקרים יותר מסובכים נוכל בעזרת ידיעת ההסתברות הגבולית לקבל תנאי שפה נוסף שיקל עלינו את מציאת הפתרון.

קשה מידי לטפל בהסתברויות המעבר בזמן סופי בשרשרות מסדר גדול מ 2. אך יש מקרים פשוטים שבהם אפשר לטפל. אלה מקרים שבהם אפשר להפעיל שיקולי סימטריה.

דוגמא
נחשב הסתברויות מעבר בשרשרת שהיוצר שלה הוא

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 2 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

שאלה
מהו $P_{1,1}(t)$?

<u>פתרון</u>

נשים לב שמצבים 2 ו 3 סימטרים ביחס למצב 1. מכל אחד מהם יש מעבר בעצמה 2 למצב 1.
לכן נוכל להסתכל על שרשרת עזר בת שני מצבים שבה מצבים 2 ו 3 מהשרשרת המקורית מאוחדים.
היוצר של השרשרת הזאת הוא

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

נקבל משוואה דיפרנציאלית $P_{1,1}'(t) = -4P_{1,1}(t) + 2(1 - P_{1,1}(t))$

או $P_{1,1}'(t) = -6P_{1,1}(t) + 2$

ובנוסף $P_{1,1}(0) = 1$

נקבל פתרון $P_{1,1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t}$

מכיון שביחס למצב 1 המצבים 2 ו 3 הם כאן סימטריים אז נקבל

$$P_{1,2}(t) = P_{1,3}(t) = \frac{1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-6t}\right)}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}$$

חישוב הסתברויות המעבר ממצבים 2 ו 3 הוא כאן קצת יותר מסובך.
נתחיל בחישוב $P_{2,1}(t)$ ששווה ל $P_{3,1}(t)$. שוב ניתן להסתכל על היוצר

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

שמייצג חלוקה לקבוצות מצבים 1 מול 2 ו 3.

נקבל $P_{2,1}'(t) = -4P_{2,1}(t) + 2(1 - P_{2,1}(t))$

או $P_{2,1}'(t) = -6P_{2,1}(t) + 2$

ובנוסף $P_{2,1}(0) = 0$

נקבל פתרון $P_{2,1}(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}$

עכשיו נרצה לחשב את $P_{2,2}(t)$.

מתקיים $P_{2,2}'(t) = -5P_{2,2}(t) + 2P_{2,1} + 3P_{2,3}(t)$

אבל אנו כבר יודעים ש $P_{2,1}(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}$

בנוסף, מכיוון שעבור כל זמן t מתקיים: $P_{2,1}(t) + P_{2,2}(t) + P_{2,3}(t) = 1$

אז $P_{2,3}(t) = 1 - P_{2,2}(t) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}\right) = \frac{2}{3} - P_{2,2}(t) + \frac{1}{3}e^{-6t}$

לכן נקבל משוואה דיפרנציאלית:

$$P_{2,2}'(t) = -5P_{2,2}(t) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}\right) + 3\left(\frac{2}{3} - P_{2,2}(t) + \frac{1}{3}e^{-6t}\right)$$

או $$P_{2,2}^{'}(t)=-8P_{2,2}(t)+\frac{1}{3}e^{-6t}+\frac{8}{3}$$

למשוואה זו נבחר פתרון: $$P_{2,2}(t)=c_1e^{-6t}+c_2e^{-8t}+c_3$$

צריך להתקיים: $$-6c_1=-8c_1+\frac{1}{3}$$

לכן נקבל ש $c_1=\frac{1}{6}$.

לכן הפתרון הוא מצורת $$P_{2,2}(t)=\frac{1}{6}e^{-6t}+c_2e^{-8t}+c_3$$

מכיון ש $P_{2,2}(0)=1$ אז $\frac{1}{6}+c_2+c_3=1$

מכיון שההסתברות הסטציונרית של מצב 2 היא $\frac{1}{3}$ (שווה ל $\frac{1-\pi_1}{2}$ משיקולי סימטריה)

לכן $c_3=\frac{1}{3}$. לכן מהמשוואה הקודמת נקבל $c_2=\frac{1}{2}$

והפתרון הוא $$P_{2,2}(t)=\frac{1}{6}e^{-6t}+\frac{1}{2}e^{-8t}+\frac{1}{3}$$

<u>סוגיה</u>

נתון תהליך מרקוב בזמן רציף על קבוצת המצבים $i=0,1,2,\cdots$. נניח שמתקיים:

עבור $i\neq 0$: $$P(X_{t+h}=i \mid X_t=0)=\lambda_i h+o(h)$$

ו $$P(X_{t+h}=0 \mid X_t=0)=1-\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i h\right)+o(h)$$

עבור $i\neq 0$: $$P(X_{t+h}=i-1 \mid X_t=i)=\mu_i h+o(h)$$

ו $$P(X_{t+h}=i \mid X_t=i)=1-\mu_i h+o(h)$$

ועבור זוגות (i,k) אחרים: $$P(X_{t+h}=i \mid X_t=k)=o(h)$$

נניח שמתקיים $\lambda_i=\frac{\lambda^i}{i(i+1)}$ ו $\mu_i=\mu^i$ עבור כל $i\geq 1$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו אם קיימים זוגות (λ,μ) שעבורם השרשרת היא מהסוג המתואר. אם לא קיימים אז נמקו זאת ואם כן קיימים אז מצאו (λ,μ) מתאימים והראו שהם עונים לדרישה. בסעיפים השונים, זמני הקפיצות הם זמני המעבר ממצב למצב.

<u>א</u>. השרשרת היא חולפת.
<u>ב</u>. לשרשרת אין התפלגות גבולית ואין לה גם התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
<u>ג</u>. לשרשרת יש התפלגות גבולית אך אין לה התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
<u>ד</u>. לשרשרת יש התפלגות גבולית ויש גם התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
<u>ה</u>. לשרשרת אין התפלגות גבולית אך יש התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.

<u>פתרון לסוגיה</u>

<u>א</u>. לא יתכן

מכל מצב i , $i>0$ בהכרח עוברים למצב $i-1$ לאחר זמן סופי. לכן מכל מצב i מגיעים באיזשהו שלב למצב 0. לכן מצב 0 הו מצב נשנה. השרשרת היא בלתי פריקה. לכן בגלל שנשנות היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים הם נשנים.

<u>ב</u>. יתכן

נניח ש $\lambda = 1$ ו $\mu = 1$. ממצב 0 מגיעים לאחד המצבים האחרים. יש כאן תחרות בין משתנים מעריכיים.

ממצב 0 מגיעים למצב i בהסתברות $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{\dfrac{1}{i(i+1)}}{\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}}$. מספר הצעדים לחזרה למצב 0 דרך מצב i הוא $i+1$. לכן תוחלת מספר הצעדים לחזרה ממצב 0 למצב 0 היא $\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{i(i+1)}(i+1) = \sum\dfrac{1}{i} = \infty$.

לכן אין התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.

בכל מצב שוהים זמן בעל תוחלת 1 עד עזיבתו.

לכן גם תוחלת הזמן עד חזרה ל 0 היא ∞. לכן מצב 0 אינו נשנה חיובי וכך גם כל המצבים האחרים אינם נשנים חיובית.

<u>ג</u>. יתכן

נבחר את אותו $\lambda = 1$ שהיה בסעיף ב'. לכן יש את אותה התפלגות של מספר הקפיצות עד חזרה ל 0. לכן אין התפלגות גבולית בזמן הקפיצות. נקבע שתוחלת זמן השהות במצב i עד מעבר למצב $i-1$ תהיה 0.5^i. לכן מכל מצב תהיה תוחלת זמן החזרה למצב 0 קטנה מ $\sum_{i=1}^{\infty}0.5^i = 2$. לכן יש תוחלת זמן סופית לחזרה ממצב 0 למצב 0 ומצב 0 הוא נשנה חיובי.

<u>ד</u>. יתכן

נבחר את אותו μ שהיה בסעיף ג'. כך בכל מקרה תהיה תוחלת זמן סופית עד חזרה למצב 0. נבחר את λ להיות 0.5. כל ההסתברות שממצב 0 נגיע ישירות למצב i תהיה: $\dfrac{0.5^i\,\dfrac{1}{i(i+1)}}{\sum_{k=1}^{\infty}0.5^k\,\dfrac{1}{k(k+1)}}$

(שוב תחרות בין זרמים פואסונים). המכנה שווה לאיזשהו קבוע M (טור שנשלט על-ידי טור גיאומטרי). המונה קטן מ 0.5^i, לכן המנה קטנה מ $\dfrac{0.5^i}{M}$. שוב מהלך ממצב 0 למצב i וחזרה לוקח $i+1$ צעדים ומתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{0.5^i}{M}(i+1) < \infty$. לכן תוחלת מספר הצעדים עד חזרה ל 0 היא סופית.

ממצב 0 ניתן להגיע ישירות למצבים 2 ו 3. לכן השרשרת הבלתי פריקה היא לא מחזורית ויש התפלגות גבולית בזמן הקפיצות.

<u>ה</u>. יתכן

נבחר את אותו λ שבחרנו בסעיף הקודם. כך תהיה תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 סופית.

כעת נקבע שתוחלת הזמן עד מעבר ממצב i למצב $i-1$ תהיה 3^i. שוב ההסתברות להגיע ממצב 0 ישירות למצב i תהיה $\dfrac{0.5^i\,\dfrac{1}{i(i+1)}}{M}$ כאשר M הוא קבוע. כדי לחזור ממצב i למצב 0 צריך לעבור i שלבים שרק לראשון שבינהם יש תוחלת 3^i. לכן תוחלת זמן החזרה למצב 0 גדולה מ $\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{0.5^i\,\dfrac{1}{i(i+1)}}{M}\cdot 3^i = \infty$. לכן תוחלת זמן החזרה ממצב 0 לעצמו היא ∞ ולשרשרת אין התפלגות גבולית.