

פתרון תרגיל 1 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

לשרשרת מרקוב המייצגת את מספר הכדורים בכד הראשון בזמן נתון יש חמישה מצבים ומטריצת מעבר:

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0
2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
3	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	1	0

השאלה לא היתה מנוסחת בצורה חד משמעית. פתרונות שמתבססים על אינטרפרטציות הגיוניות אחרות גם יתקבלו. אפשר לחשוב על מודל של כדורים שונים שבו יש $2^4 = 16$ מצבים ובכל שורה יש ארבעה איברים ששווים ל $\frac{1}{4}$ והיתר הם אפסים.

שאלה 2

בשני הסעיפים הראשונים מדובר בשרשרות מרקוב.

מטריצת מעבר בשני הסעיפים הראשונים היא $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

$$P(Z_n = 2 | Z_{n-1} = 2, Z_{n-3} = 0) = 0 \neq P(Z_n = 2 | Z_{n-1} = 2, Z_{n-3} = 2)$$

לכן לא כל המידע הרלוונטי מהעבר לגבי Z_n נמצא ב Z_{n-1} . לכן Z_n אינה שרשרת מרקוב.

שאלה 3

לא מתקיימת תכונת ההומוגניות בזמן.

נתחיל רק עם אינטואיציה ואחר-כך נראה חישובים.

כאשר המכונה די חדשה אז יש סבירות לא כלל נמוכה שאם היא עובדת על רכיב אחד, אז זהו הרכיב החלש (שהוא בעל זמן חיים המתפלג $G(0.8)$). זה פחות סביר מאשר שהיא עובדת על הרכיב החזק, אבל עדיין בעל סבירות לא נמוכה. כאשר היא עובדת לאחר הרבה זמן על רכיב אחד אז הסבירות שזהו הרכיב החלש דועכת ולכן סיכוייה ליפול עד השלב הבא קטנים יותר (כפי הנראה היא מתבססת על הרכיב החזק).

ועכשיו לחישובים:

בהינתן שהיא עובדת על רכיב אחד ביחידת הזמן השניה, ההסתברות שזהו החלש היא:

$$\frac{0.2 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8(1 - 0.5)}$$

וההסתברות שזהו הרכיב החזק היא $\frac{0.8 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.5}$.

ההסתברות השלמה שהיא תעבוד גם ביחידת הזמן שמייד אחר-כך היא:

$$\frac{0.2 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.5} 0.2 + \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.5} 0.5$$

אם למשל לאחר 10 יחידות זמן היא עובדת בהתבסס על רכיב אחד אז ההסתברות שזהו הרכיב החלש

היא $\frac{0.2^9(1-0.5^9)}{0.2^9(1-0.5^9)+0.5^9(1-0.2^9)}$ וההסתברות השלמה שהרכיב שעובד יעבוד גם בשלב הבא היא

$$\frac{0.2^9(1-0.5^9)}{0.2^9(1-0.5^9)+0.5^9(1-0.2^9)} 0.2 + \frac{0.5^9(1-0.2^9)}{0.2^9(1-0.5^9)+0.5^9(1-0.2^9)} 0.5$$

הערה: כאשר הזמן שואף לאינסוף, אז לגבי מכונה שמתבססת על רכיב אחד, ההסתברות שהיא תעבוד עוד יחידת זמן אחת שואפת ל 0.5. הסיבה לכך היא שההסתברות המותנה שהיא עובדת בהתבסס על הרכיב החזק, שואפת ל 1.

שאלה 4

קבוצת המצבים $\{1,4\}$ היא מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים (לא ניתן לצאת ממנה ויש מסלולים בין שני המצבים). מצב 6 הוא מחלקה בלתי פריקה של מצב נשנה שהוא סופג. קבוצת המצבים $\{3,5\}$ הם מחלקה בלתי פריקה של מצבים נשנים. ממצב 7 יש מסלולים למחלקות שמהן אין חזרה אליו, לכן מצב 7 הוא חולף. ממצב 2 יש מסלול למצב 6 שממנו אין חזרה, לכן מצב 2 הוא חולף. ממצב 8 יש מסלול למצב 1 שממנו אין חזרה למצב 8, לכן מצב 8 הוא חולף.