שאלה: יהיו $X_1, X_2, \dots$ סדרת משתנים. מתקיים $P(X_1=0)=1$,
עבור $i\geq 2$ התפלגות X_i נקבעת על פי הערכים שקבלו
$X_1, X_2, \dots, X_{i-1}$. מתקיים $X_i = -\left(\sum_{k=1}^{i-1} X_k\right) + y_i$ כאשר
המשתנים y_i $2\leq i<\infty$ הם בלתי תלויים ומקיימים
$P(y_i=0)=1-\frac{2}{i}$, $P(y_i=i)=P(y_i=-i)=\frac{1}{i}$.

א. הראה שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה.

ב. הראה שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה.

פתרון:

א. בכדי שעל הסדרה יחול החוק החזק, צריכה סדרת הממוצעים המצטברים לשאוף לסדרת התוחלות המצטברות, צ"ל בהסתברות 1. כאן סדרת הסכומים המצטברים $\{S_i\}$ שווה למעשה לסדרה $\{y_i\}$. לכל i, y_i הוא בעל תוחלת אפס לכן אילו החוק החזק היה חל על הסדרה היתה צריכה הסדרה $\left\{\frac{y_i}{i}\right\}$ לשאוף לאפס בהסתברות 1. המאורעות $A_i=(y_i=i)$ הם בלתי תלויים ומתקיים $\sum P(A_i)=\sum\frac{1}{i}=\infty$, לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1, ∞ פעמים יתקיים $(y_i=i)$ ו ∞ פעמים $\left(\frac{S_i}{i}=1\right)$ לכן אין התכנסות של הסדרה $\left\{\frac{S_i}{i}\right\}$.

ב. כאמור $E\left(\frac{S_i}{i}\right)=E\left(\frac{y_i}{i}\right)=0$. מתקיים $P\left(\frac{S_i}{i}\neq 0\right)=\frac{2}{i}$ אך $\lim_{i\to\infty}\left(\frac{2}{i}\right)=0$ לכן בוודאי עבור כל $\varepsilon>0$,
$$\lim_{i\to\infty} P\left(\left|\frac{S_i}{i}-E\left(\frac{S_i}{i}\right)\right|>\varepsilon\right)=0.$$

שלומי

שאלה:

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים בלתי תלויים שעבורם מתקיים:

אם $i=k^k$ עבור אי־זשהו k טבעי אז:

$$P[X_i=i]=P[X_i=-i]=\frac{1}{2k} \qquad P[X_i=0]=1-\frac{1}{k}$$

ועבור i שלא מקיים את הדרישה הנ"ל $P[X_i=0]=1$

א. הראה שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה.

ב. הראה שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה.

פתרון:

א. מכיון ש: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$ והמשתנים X_i בלתי תלויים אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 אינסוף פעמים יתקיים $|X_{k^k}|=k^k$ כך ש: אינסוף פעמים יתקיים $\left|\frac{S_{k^k}}{k^k}-\frac{S_{k^k-1}}{k^k-1}\right|>0.5$ לכן סדרת הממוצעים תצא מסביבה ברדיוס 0.25 של הראשית אינסוף פעמים ואין התכנסות של סדרת הממוצעים.

ב. נסתכל על נקודת זמן i: $k^k\le i<(k+1)^{k+1}$. בנקודה כזאת המשתנה האחרון שיכול היה לקבל ערך שונה מאפס הוא X_{k^k}.
מתקיים עבור כל $\varepsilon>0$: $P\left(\left|\frac{X_{k^k}}{i}\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{1}{k}$ לכן:

$$\lim_{k\to\infty}P\left(\left|\frac{X_{k^k}}{i}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)=0 \quad (1).$$

מתקיים $\sum_{n<k}n^n<k^{k-1}$ לכן

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{n<k}|X_{n^n}|}{i}=0 \quad (2)$$

מ: (1) ו (2) נקבל: $\lim_{k\to\infty}P\left(\left|\frac{\sum_{n=1}^{k}X_{n^n}}{i}\right|>\varepsilon\right)=0$ לכל $\varepsilon>0$.

הערה: די היה אם במקום (2) היינו מראים ש:

$$\lim_{k\to\infty}P\left(\left|\frac{\sum_{n<k}X_{n^n}}{i}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)=0$$

לכל $\varepsilon>0$, אך הראינו יותר מזה.

שלומי