פתרון שאלה 7

נגדיר את z_i כ $y_i - \frac{1}{4}$, $\forall i:\ E(z_i)=0$, z_i שווי התפלגות.

עבור כל $0 \le d_i$ קבועים: $E\left(z_1^{d_1} \cdot z_2^{d_2} \cdot z_3^{d_3} \cdot z_4^{d_4}\right) \le 1$

עבור כל z_i ו z_j ב"ת: $E\left(z_i^{d_1} \cdot z_j^{d_2}\right) = E\left(z_i^{d_1}\right) \cdot E\left(z_j^{d_2}\right)$

$$P\left(\left|\frac{\sum y_i}{n} - \frac{1}{4}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\sum z_i}{n}\right| > \varepsilon\right) \overset{\text{מרקוב}}{<} \frac{E\left(\sum z_i\right)^4}{n^4 \cdot \varepsilon^4}$$

$$E\left(\sum z_i\right)^4 = \sum_{i=1}^{n} E\left(z_i^4\right) + \sum_{i \ne j} E\left(z_i^2 \cdot z_j^2\right) + \sum_{i,j,k} E\left(z_i \cdot z_j \cdot z_k^2\right) +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} E\left(z_i \cdot z_j \cdot z_k \cdot z_l\right) + \sum_{i \ne j} E\left(z_i^3 \cdot z_j\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} E\left(z_i^4\right) = n \cdot E\left(z_1^4\right) \le n \ , \quad \sum_{i \ne j} E\left(z_i^2 z_j^2\right) \le \binom{n}{2}\binom{4}{2} < 6 \cdot n^2$$

$$\sum_{i,j,k,l} E\left(z_i \cdot z_j \cdot z_k \cdot z_l\right) \overset{1}{=} \sum_{i \ne j} E\left(z_i \cdot z_{i+1} \cdot z_j \cdot z_{j+1}\right) \le 4! \binom{n}{2} < 24 \cdot n^2$$

1. מכיון שאם מופיע משתנה שהוא בלתי תלוי באחרים אז המכפלה היא אפס.

$$\sum_{i,j,k} E\left(z_i \cdot z_j \cdot z_k^2\right) \overset{2}{\le} n(n-1)\binom{4}{1}\binom{3}{1} \ ; \quad \sum_{i \ne j} E\left(z_i^3 \cdot z_j\right) \le 2n \cdot \binom{4}{3}$$

2. מכיון שכל משתנה שמופיע בחזקה ראשונה חייב להיות תלוי באחר, כי שהמכפלה שבה הוא מופיע לבד תתאפס.

לכן:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}\right| > \varepsilon\right) < \frac{100 \cdot n^2}{n^4 \cdot \varepsilon^4} = \frac{100}{\varepsilon^4 \cdot n^2}$$

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \frac{1}{4}\right| > \varepsilon\right) \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{100}{\varepsilon^4 \cdot n^2}$$

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \frac{1}{4}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

מכיון שהטור מתכנס זנבו קטן כרצוננו

פתרון שאלה 7 בדרך אחרת

ראשית נראה ששימוש שגרתי באי שוויון צ'בישב איננו מספיק כדי להוכיח שהחוק חל על הסדרה.

$$P\left(\left|S_n - n/4\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum Var(y_i) + \sum cov(y_i, y_j)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} =$$

$$= \frac{n \cdot \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right) + 2\cdot(n-1)\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{n \cdot \frac{3}{16} + 2(n-1)\cdot\frac{1}{16}}{n^2\cdot\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{\frac{5}{16}n - \frac{1}{8}}{n^2 \cdot \varepsilon^2} < \frac{1}{n\cdot\varepsilon^2}$$

זה מוכיח שהחוק החלש חל על הסדרה, מכיון שעבור כל $N<n$ הסיכוי לסטיה גדולה מ-ε קטן מ-$\frac{1}{N\cdot\varepsilon^2}$ אך זה לא מוכיח שהסיכוי שאי פעם אחרי N תהיה סטיה של יותר מ-ε שואף לאפס כאשר $N\to\infty$
(הטור $\sum\frac{1}{n\cdot\varepsilon^2}$ אינו מתכנס)

לגבי החוק החזק

נבחר נקודות a_i $\quad 1\leq i<\infty$ $\quad a_1=\left\lceil\frac{100}{\varepsilon^2}\right\rceil$; $\forall i\geq 1$: $a_{i+1}=a_i+\lfloor\sqrt{a_i}\rfloor$.

טענה: אם $\left|\frac{S_{a_i}}{a_i}-\frac{1}{4}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ אז לכל נקודה $a_i\leq m\leq a_{i+1}$: $\left|\frac{S_m}{m}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$

הסבר: כך קורה גם אם כל התוצאות בקטע זבות (על או פלי) – הנקודות בקטע מהוות לא יותר מ-$\frac{\varepsilon}{10}$ מהנקודות המוכרות עד סוף הקטע.

טענה:
$$P\left(\left|\frac{S_{a_i}}{a_i}-\frac{1}{4}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\overset{*}{\leq}\frac{1}{a_i\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}=\frac{4}{a_i\cdot\varepsilon^2}$$

* צ'בישב כמו למעלה

המשך פתרון שאלה 7

טענה: הטור $\sum \frac{1}{a_j \cdot \varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum \frac{1}{a_j}$ מתכנס

הסבר: עבור כל t, בין t ל $2t$ יש פחות מ $2\cdot\sqrt{t}$ ערכי a_j שכל אחד מהם אינו גדול מ $\frac{1}{t}$ כך שסכומם קטן מ $\frac{2}{\sqrt{t}}$, לכן סכום הטור נשלט ע"י טור גיאומטרי:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon^2 \cdot \sqrt{a_1 \cdot 2^j}} = \frac{2}{\varepsilon^2 \cdot \sqrt{a_1}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2}^{-j}$$

טענה: $P\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot S_n\right) \longrightarrow \frac{1}{4}\right] = 1$

הסבר: עבור כל $a_1 < N$

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{4}\right| \ge \varepsilon\right)\right) \le \sum_{j=b}^{\infty} \frac{4}{\varepsilon^2 a_j}$$

כאשר $b = \max\{a_j \le N\}$

הטור מתכנס ולכן זנבו קטן כרצוננו.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \qquad \lim_{N\longrightarrow\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{4}\right| \ge \varepsilon\right)\right) = 0$$

גם כאן וגם בפתרון בדרך השלישה אפשר להשתמש בלמה של בורל קנטלי. בדרך שניה, אם נגדיר סדרת מאורעות A_i : $1 \le i < \infty$ $A_i = \left(\left|\frac{S_{a_i}}{a_i} - \frac{1}{4}\right| > \varepsilon\right)$ אז

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{\varepsilon^2 \cdot a_j} < \infty$$

ובדרך השלישית: $A_n = \left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{4}\right| > \varepsilon\right)$ אז

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{\varepsilon^4 \cdot n^2} < \infty$$

ולכן יתרחשו רק מספר סופי של מאורעות A_n.

שלומי