שאלה:

תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 0.5$ לכל $i \geq 1$. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. נסתכל על הסדרה $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים $X_1, X_2, X_3, \cdots$.

(א) הראו שעבור כל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$, קיים n טבעי כך שרציונלי זה יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$.

(ב) הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$ אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.

(ג) הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ 0.5 לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

(ד) הראו שהרציונלי 0.5 יתקבל כמנה אינסוף פעמים בהסתברות 1 .

(ה) הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

(ו) הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

פתרון:

(א) הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

(ב) נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2 \cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1, p_1, q_2, p_2 :

נבחר n כך ש $q_2 \cdot 10^n \geq q_1$ וגם $p_2 \cdot 10^n \geq p_1$. המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2 \cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1 הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2 \cdot 10^n - p_1$ פעמים.

(ג) על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל 0.5 (0.5 זה כאן התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon > 0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ 0.5 בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ 0.5 מרוחק מ 0.5 ב $\varepsilon = \left| 0.5 - \frac{p}{q} \right|$.

(ד) בהרצאה הוכחנו שההילוך המקרי הסימטרי על הישר הוא נשנה, זאת אומרת שבהילוך זה בהסתברות 1 , אינסוף פעמים יהיו מספר הצעדים המצטברים ימינה שווה למספר הצעדים המצטברים שמאלה. לכן בסדרה שלנו כאן, בהסתברות 1 , אינסוף פעמים תהיה הפרופורציה המצטברת של התוצאות 1 מתוך כלל הנסיונות שווה בדיוק ל 0.5 .

(ה) לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח $(0,1)$ לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו שהמנה 0.5 מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

(ו) $P\left(\frac{S_3}{3} = \frac{2}{3} \middle| \frac{S_2}{2} = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} > 0$, $P\left(\frac{S_5}{5} = \frac{2}{3} \middle| \frac{S_4}{4} = \frac{1}{2} \right) = 0$ (מדובר בהסתברויות מותנות).

מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

שלומי