התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

I הקדמה :

יהי $X_1, X_2, \ldots$ סדרה של מ"מ המוגדרים על מרחב הסתברות (תהליך מקרי)

המ"מ מקבלים מספר סופי או בן-מנייה של ערכים (מצבים)

נאמר שתהליך $X_1, X_2, \ldots$ הוא מרקוב-הומוגני אם $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, A\} = P_{ij}$

עבור כל מאורע A המדיד ביחס לעבר $X_1, X_2, \ldots X_n$ ועבור כל n .

כלומר הסתברות המעבר מi ל j קבועות ולא תלויות באיך הגענו לi ומהו n

עבור תהליך מרקוב הומוגני נסמן בM את מטריצת הסתברויות המעבר $M = (P_{ij})$

קל לראות עבור כל i : $P_{ij} > 0, \ \sum_j P_{ij} = 1$

מטריצה המקיימת זאת נקראית מטריצה סטוכסטית.

נשים לב עבור כל טבעי $M^n = (P_{ij}^{(n)})$ היא מטריצה סטוכסטית וכמו-כן

$P_{ij}^{(n)}$ - ההסתברות לעבור מi לj בn צעדים .

נוסיף את ההגדרה $M^0 = I = (P_{ij}^{(0)})$

II מיון מצבים :

נאמר שמצב i מתקשר למצב j אם קיים n טבעי כך ש $P_{ij}^{(n)} > 0$

נאמר שמצבים i , j מתקשרים אם i מתקשר ל j וגם j מתקשר לi .

הגדרה : i נקרא מצב ארגודי אם <u>כל</u> מצב j ש i מתקשר אליו – גם j מתקשר לi (כלומר i, j מתקשרים).

<u>משפט 1</u> : אם i ארגודי ו i מתקשר ל j , אז גם j ארגודי

יחס ההתקשרות הינו יחס שקילות :

1. רפלקסיבי $P_{ii}^{0} = 1 > 0$
2. סימטרי $j \to i \Leftarrow i \to j$
3. טרנזיטיבי $i \to k \Leftarrow i \to j, j \to k$

מצב ארגודי מגדיר מחלקה של מצבים – *המחלקה הארגודית של מצבים של* i

זוהי מחלקה של מצבים, כך שמכל מצב ניתן להגיע לכל מצב אחר במחלקה ואף מצב במחלקה לא מתקשר למצב מחוץ למחלקה.

הגדרה : M היא אי פריקה (*irreducible*) אם כל המצבים משתייכים לאותה מחלקה ארגודית

הגדרה : מצב i הוא נשנה אם ההסתברות לעבור מ i אל i אי פעם היא 1

סימון : $f_{ij}^{(k)}, k \geq 1$ ההסתברות לעבור מi אל j בפעם הראשונה בk צעדים

מאחר ו $f_{ij}^{(k)}$ הם הסתברויות של מאורעות זרים עבור ערכים שונים של k מתקיים $P\left(\bigcup_{k \geq 1} f_{ii}^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$

משוואת ההתחדשות : (נובעת מנוסחאת ההסתברות השלמה)

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

מכפלת הסתברויות מותנות בהסתברויות מאורעות זרים המכסים את Ω

$p_{ii}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$, $n\geq 1$, נוסיף $p_{ii}^{(0)}=1$

אנו רוצים לאפיין מצבים נשנים , נזכור שמצב i הוא נשנה אם $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}=1$

שימוש בפונקציות יוצרות
עבור סדרה $a=(a_0,a_1,a_2,...)$ נגדיר את הפונקציה היוצרת של a כטור חזקות $G_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ בעלת רדיוס ההתכנסות A
עבור סדרה $b=(b_0,b_1,b_2,...)$ נגדיר את הפונקציה היוצרת של b כטור חזקות $G_b(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ בעלת רדיוס התכנסות B
הפונקציה $G_b(t)G_a(t)$ היא בעלת טור חזקות ברדיוס *min(A,B)* כך ש $G_b(t)G_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, ו $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$

נחזור לסדרות $\{f_{ii}^{(n)}\}$ $\{p_{ii}^{(n)}\}$ עבור *n=0,1,2,...*

נסמן ב *F(t)* את הפונקציה היוצרת של $\{f_{ii}^{(n)}\}$, ב *G(t)* את הפונקציה היוצרת של $\{p_{ii}^{(n)}\}$ ממשוואת ההתחדשות נובע :

G(t)= G(t)F(t)+1 (1+ נוסף כיוון שסוכמים רק מאינדקס 1)

נשים לב (מאחר ו $f_{ii}^{(n)}, p_{ii}^{(n)}\leq 1$) שרדיוס ההתכנסות של *F(t)* , *G(t)* הוא לפחות 1

עבור $|t|<1$ נקבל : $G(t)=\frac{1}{1-F(t)}$.

ולכן אם $F(1)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}<1$ נובע ש $G(1)=\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}<\infty$

אם $F(1)=1$ נובע ש $G(1)=\infty$

לכן הוכחנו את המשפט הבא :

<u>משפט 2</u> : i הוא מצב נשנה אמם $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)}=\infty$

נוכיח כעת שנשנות היא תכונה מחלקתית

<u>משפט 3</u> : אם i ו j באותה מחלקה ארגודית אז i נשנה אמם j נשנה

מסקנה : M שרשרת אי פריקה אז כל המצבים נשנים או כל המצבים חולפים

הוכחה : יהי i נשנה , נראה ש j נשנה

קיים $p_{ji}^{(k)}>0, k\geq 1$ וקיים $p_{ij}^{(l)}>0, l\geq 1$

מכאן נובע שעבור כל $n\geq 0$: $p_{jj}^{(k+l+n)}\geq p_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(l)}$ (מסלול אחד מיני רבים)

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(k+l+n)} \ge p_{ji}^{(k)} p_{ij}^{(l)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ (i נשנה, לפי משפט 2)

<u>משפט 4</u> : אם מצב i אינו ארגודי הוא חולף

הוכחה : מכיוון ש i אינו ארגודי יש מצב j כך שi מתקשר לj ו j לא מתקשר לi .

לכן יש הסתברות חיובית לעבור לj בפעם הראשונה מi , נסמן זאת ב $f_{ij}^{(k)} > 0$

לכן יש הסתברות חיובית לצאת מi ולא לחזור אף-פעם לi

כלומר ההסתברות של המאורע המשלים {נחזור אי פעם לi} איננה 1

<u>משפט 5</u> : אם i נשנה אז נחזור מi לi אינסוף פעמים בהסתברות 1

הוכחה : נראה שהסתברות לחזור לפחות פעמים היא 1 כי : $P\{return\_twice\} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} P\{return\_ever\} = 1$

באופן דומה באינדוקציה עבור כל n

מחזוריות :

יהי i מצב ארגודי , נתבונן בסדרת המספרים הטבעיים $\{n_m\} = N_i$ שעבורם $p_{ii}^{(n_m)} > 0$

הגדרה : המחלק המשותף המקסימלי של סדרת המספרים $\{n_m\} = N_i$ יקרא המחזור של המצב i ונסמנו ב d_i .

אם $d_i = 1$ נאמר שהמצב i הוא לא מחזורי

נשים לב שאם $n_{m_1}, n_{m_2} \in N_i$ אז גם $n_{m_1} + n_{m_2} \in N_i$ וזאת מכיוון ש $0 < p^{(n_{m_1})} p^{(n_{m_2})} \le p^{(n_{m_1}+n_{m_2})}$

קבוצת מספרים טבעיים המקיימת את הנ"ל נקראית חבורה למחצה ($semigroup$)

משפט מתורת המספרים : אם M היא חבורה למחצה של מספרים טבעיים בעלת מחלק משותף מקסימלי d

אז קיים n_0 טבעי כך שעבור $n \ge n_0$ מתקיים $dn \in M$

בפרט d=1 אז עבור $n \ge n_0$ מתקיים $n \in M$

<u>משפט 6</u> : אם i ו j שייכים לאותה מחלקה ארגודית של מצבים אז יש להם אותו מחזור כלומר $d_i = d_j$

הוכחה : יהיו k ו l כמו בהוכחת משפט 3, ויהי n כזה שעבורו $d_i n, d_i(n+1) \in N_i$

מתקיים : $P_{jj}^{(k+l+d_i n)} > 0$, $P_{jj}^{(k+l+d_i(n+1))} > 0$

לכן d_j מחלק גם את $(k+l+d_i n)$ וגם את $(k+l+d_i(n+1))$

לכן d_j מחלק את ההפרש ביניהם כלומר את d_i

משיקולי סימטריה d_i מחלק את d_j - ולכן $d_i = d_j$

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

נשנות אפס ($Nill\ Potent$)

יהי i מצב נשנה , נתבונן במ"מ T_i - מספר הצעדים לחזור מi לi בפעם הראשונה . התוחלת של T_i היא

$$E(T_i) = E_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)}$$

הגדרה : מצב i – נשנה אפס אם $E_i = \infty$, נשנה חיובי אם $E_i < \infty$.

<u>משפט</u> : נראה תנאי מספיק (מאוחר יותר יתגלה כהכרחי) לכך שi נשנה אפס. נוכיח שאם $\lim P_{ii}^{(n)} = 0$ אז i נשנה אפס

הוכחה : נסמן $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} f_{ii}^{(k)}$, $n \geq 1$

נשים לב ש r_n היא ההסתברות שכאשר יצאנו מi נחזור לi בפעם הראשונה בזמן $\geq n$

כמו-כן ידוע ש $E_i = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$, בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P^{(n-k)} r_k$

כאשר המאורע A_n הוא המאורע המותנה שיצאנו מi וחזרנו אי פעם לi בזמן $\leq n$.

מצב i נשנה, לפי משפט 5 המאורע הזה הוא בעל הסתברות 1 לכן $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P^{(n-k)} r_k = 1$

כעת נוכיח את טענתנו בדרך השלילה:

יהי $\lim P_{ii}^{(n)} = 0$, נניח שi לא נשנה אפס אז $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$,

לכן עבור $\varepsilon > 0$ נתון , קיים m מספיק גדול כך ש $\sum_{k=m}^{\infty} r_k < \varepsilon$

וכמו-כן עבור $l \geq m$, $P_{ii}^{(l)} < \varepsilon$ (מההנחה ש $\lim P_{ii}^{(n)} = 0$).

$$1 = P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p^{(n-k)} r_k \leq \sum_{k=1}^{m} p^{(n-k)} r_k + \sum_{k=m+1}^{n} r_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{m} r_k + \varepsilon$$

נקבל $1 \leq \sum_{k=1}^{m} \varepsilon r_k + \sum_{k=m+1}^{n} r_k$ עבור $n \geq 2m$.

לכן $\sum_{k=1}^{m} r_k \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

לכן $\sum_{k=1}^{m} r_k$ גדול כרצוננו עבור m מספיק גדול – סתירה !

<u>משפט</u> : במחלקה ארגודית כל המצבים נשנים חיובית/ נשנים אפס/ חולפים.

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

נשנות חיובית

המשפט הבא הוא מרכזי

<u>משפט 7</u> : אם i הוא מצב ארגודי לא מחזורי אז $\exists \lim P_{ii}^{(n)} = \Pi_i$ כך ש $\Pi_i = \frac{1}{E_i}$

הוכחה :

למה : i מצב ארגודי , נסמן $\lambda = \overline{\lim} P_{ii}^{(n)}$ ו $\mu = \underline{\lim} P_{ii}^{(n)}$

תהי m_n סדרה עולה של מספרים טבעיים כך $\lim P_{ii}^{(m_n)} = \lambda$ או $\lim P_{ii}^{(m_n)} = \mu$

תהי $f_{ii}^{(l)} > 0$ אז $\lim P_{ii}^{(m_n-l)} = \lambda$ או $\lim P_{ii}^{(m_n-l)} = \mu$

הוכחה : נתבונן במשוואת ההתחדשות

$$P_{ii}^{(m_n)} = \sum_{k=1}^{m_n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(m_n-k)} = \sum_{k=1}^{t} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(m_n-l)} + \sum_{k=t+1}^{m_n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(m_n-k)}$$

ונוכיח עבור המקרה של הגבול העליון λ

עבור $\varepsilon > 0$ נבחר t מספיק גדול כך ש :

א. $P_{ii}^{(n)} < \lambda + \varepsilon$ עבור $n \ge t$ (מהיותו גבול עליון)

ב. $\sum_{n=t+1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < \varepsilon$ וכמו-כן $t > l$ (זנב של טור מתכנס)

ג. $P^{(m_n)} > \lambda - \varepsilon$ וכמו-כן $m_n > 2t$

$$\lambda - \varepsilon < P^{(m_n)} \le \sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{ii}^{(k)}(\lambda+\varepsilon) + f_{ii}^{(l)} P^{(m_n-l)} + \sum_{k=t+1}^{m_n} f_{ii}^{(k)}$$

לכן $\lambda - \varepsilon < (\lambda+\varepsilon)(1 - f_{ii}^{(l)}) + f_{ii}^{(l)} P^{(m_n-l)} + \varepsilon$

כלומר $(\lambda+\varepsilon) f_{ii}^{(l)} - 3\varepsilon < f_{ii}^{(l)} P^{(m_n-l)}$ או $P^{(m_n-l)} > \lambda + \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{f_{ii}^{(l)}}$

לכן $\underline{\lim} P^{(m_n-l)} \ge \lambda$ מכיוון שוודאי $\overline{\lim} P^{(m_n-l)} \le \lambda$ - מ.ש.ל.

עבור הגבול התחתון μ בצורה דומה .

הוכחת משפט 7 : יהי i מצב ארגודי , לא מחזורי , תהי m_n סדרה של טבעיים כך ש $\lim P_{ii}^{(m_n)} = \lambda = \overline{\lim} P_{ii}^{(n)}$

נתבונן בקבוצת המספרים הטבעיים L כך שעבור כל $\{m_n\}$ כנ"ל מתקיים שגם $\{m_n - l\}$, $l \in L$ היא סדרה כנ"ל.

הקבוצה L מהווה חבורה למחצה הנוצרת ע"י האיברים l כך ש $f_{ii}^{(l)} > 0$

נובע מההנחה שi לא מחזורי שקיים $l_0 \in L$ כך שעבור כל $l \ge l_0 \Rightarrow l \in L$, לכן הסדרות

$\{m_n - l_0\}$ $\{m_n - l_0 - 1\}$ $\{m_n - l_0 - \ldots\}$

נתבונן $1 = \sum_{k=1}^{n} P_{ii}^{(n-k)} r_k$ ונקבל $1 = \sum_{k=1}^{m_n-l_0} P_{ii}^{(m_n-l_0-k)} r_k \ge \sum_{k=1}^{s} r_k P_{ii}^{(m_n-l_0-k)}$ עבור s קבוע ו $m_n - l - s > s$

נקבל $1 \ge \lim \sum_{k=1}^{s} r_k P_{ii}^{(m_n-l_0-k)} = \lambda \sum_{k=1}^{s} r_k$

לכן $\lambda \le \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} r_k}$ עבור כל s, ע"י השאפת $s \to \infty$ נקבל $\lambda \le \frac{1}{E_i}$.

לכן המשפט הוכח במקרה שi הוא נשנה אפס. כיוון ש $\lambda = 0$ וגם $\mu = 0$ והגבול קיים.

נניח כעת ש $\lambda > 0$ כלומר המצב נשנה חיובי, כלומר $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$

נניח ש $P^{(m_n)} \to \mu$ ונקבל $1 \le \sum_{k=1}^{s} r_k P^{(m_n-l_0-k)} + \sum_{k=s+1}^{m_n-l_0} r_k \le \sum_{k=1}^{s} r_k P^{(m_n-l_0-k)} + \sum_{k=s+1}^{\infty} r_k$

נשאיף את $n \to \infty$ ונקבל $1 \le \mu \sum_{k=1}^{s} r_k$

ולכן עבור כל s נקבל $\mu \ge \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} r_k}$ נשאיף את $s \to \infty$ ונקבל $\mu \ge \frac{1}{E_i}$

נובע ש $\lambda = \mu = \frac{1}{E_i}$ מ.ש.ל

התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

הסתברות סטציונרית

הוקטור $\pi = (\pi_1, \pi_2, ...)$ יקרא וקטור הסתברויות סטציונריות אם $\sum_i \pi_i = 1$, $\pi_i \geq 0$, ו $\pi M = \pi$

כלומר עבור כל i : $\pi_i = \sum_j \pi_j P_{ij}$

תהי מטריצה M אי-פריקה

<u>משפט 8</u> : ל M קיים וקטור הסתברויות סטציונריות אםם M נשנית חיובית ואז הוא יחיד.

הוכחה : נתחיל במקרה שM לא מחזורית .

במקרה זה נוכיח שהוקטור הסטציונרי π הוא $\pi_i = \dfrac{1}{E_i} = \lim P_{ii}{}^{(n)}$

תחילה נראה שעבור כל מצב j : $\pi_i = \lim P_{ji}{}^{(n)}$

נרשום משוואת התחדשות $P_{ji}{}^{(n)} = \sum f_{ji}{}^{(k)} p_{ii}{}^{(n-k)}$

כאשר $f_{ji}{}^{(k)}$ היא ההסתברות לעבור בפעם הראשונה מ j ל i בk צעדים .

לכן $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}{}^{(k)} = 1$ היא ההסתברות לעבור אי פעם מ j לi בשרשרת אי פריקה ונשנית.

כעת $P_{ji}{}^{(n)} = \sum_{k=1}^{s} f_{ji}{}^{(k)} P_{ii}{}^{(n-k)}$ עבור s קבוע ו $n>s$

לכן $\underline{\lim} P_{ji}{}^{(n)} \geq \pi_i \sum_{k=1}^{s} f_{ji}{}^{(k)} \xrightarrow[s\to\infty]{} \pi_i$ כש $s \to \infty$

כמו-כן $P_{ji}{}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^{s} f_{ji}{}^{(k)} P^{(n-k)} + \sum_{k=s+1}^{\infty} f_{ji}{}^{(k)}$

לכן $\overline{\lim} P_{ji}{}^{(n)} \leq \pi_i \sum_{k=1}^{s} f_{ji}{}^{(k)} \xrightarrow[s\to\infty]{} \pi_i$

כעת נראה $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \leq 1$:

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} P_{1,j}{}^{(n)} \geq \sum_{j=1}^{s} P_{1,j}{}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j=1}^{s} \pi_j \xrightarrow[s\to\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$$

בצעד הבא נראה ש π הוא וקטור סטציונרי

$$P_{ii}{}^{(n+1)} = \sum P_{ik}{}^{(n)} P_{ki} \geq \sum_{k=1}^{s} P_{ik}{}^{(n)} P_{ki} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{s} \pi_k P_{ki}$$

אבל $P_{ii}{}^{(n+1)} \to \pi_i$ לכן $\pi_i \geq \sum_{k=1}^{s} \pi_k P_{ki}$

כעת כאשר $s \to \infty$ נקבל $\pi_i \geq \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k P_{ki}$

כעת נסכם $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \geq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k P_{ki} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \sum_{i=1}^{\infty} P_{ki} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k$ (המעבר האחרון כיוון ש $\sum_i P_{ki} = 1$)

לכן קיים שוויון עבור כל i כלומר $\pi_i = \sum_k \pi_k P_{ki}$ ו π הוא וקטור סטציונרי .

התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

נראה ש π הוא וקטור הסתברות מכיוון ש $\pi M=\pi$ נובע שעבור כל n $\pi M^n=\pi$ לכן

$$\pi_i=\sum_j \pi_j P_{ji}{}^{(n)} \le \sum_{j=1}^{s}\pi_j P_{ji}{}^{(n)}+\sum_{j=s+1}^{\infty}\pi_j P_{ji}{}^{(n)}$$

לכן עבור $s\to\infty$ נקבל $\pi_i \le \pi_i \sum_{j=1}^{s}\pi_j+\varepsilon \le \pi_i\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j+\varepsilon$

מכיוון שזה נכון עבור כל $\varepsilon>0$ נקבל $\pi_i\le \pi_i\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j$

מכיוון ש $\pi_i>0$ נקבל $1\le\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j$

נראה ש π הוא יחיד ,

יהי $\pi'=(\pi'_1,\pi'_2,...)$ וקטור סטציונרי . מתקיים $\pi' M^n=\pi'$

ולכן $\pi_i'=\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j' P_{ji}{}^{(n)} \ge \sum_{j=1}^{s}\pi_j' P_{ji}{}^{(n)} \to \pi_i\sum_{j=1}^{s}\pi_j$

נשאיף את $s\to\infty$ ונקבל $\pi_i' \ge \pi_i\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j'=\pi_i$

נסכם על i ונקבל $1=\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i' \ge \sum \pi_i=1$

לכן מתקיים שיוויון $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i'=\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i$ ומוכרח להתקיים שוויון בכל האיברים , כלומר עבור כל i $\pi_i'=\pi_i$

<u>המקרה המחזורי :</u>

תהי M מטריצה אי פריקה, נשנית ובעלת מחזור d . נחלק את מרחב המצבים למחלקות שקילות באופן הבא :

נבחר במצב i_0 , נגדיר מחלקה C_0 באופן הבא : $j\in C_0$ אם $P_{ij}{}^{(n)}>0$ רק עבור $n=md$.

C_1 מוגדר כמחלקת המצבים j , כך שאפשר לעבור מ i ל j רק ב $md+1$ צעדים . באופן כללי עבור C_l ,
$l=0,1,...d-1$ היא מחלקת המצבים j כך שאפשר לעבור מ i_0 ל j ב $md+l$ צעדים.

<u>משפט 9 :</u> המחלקות C_l זרות ומקיים שאם $i\in C_{l_1}$ ו $j\in C_{l_2}$ אז אפשר לעבור מi לj רק ב $md+l_2-l_1$ צעדים.

הוכחה : (קלה)

נתבונן ב M^d , זוהי מטריצה סטוכטית וממשפט 9 נובע שהיא מתפרקת ל d מחלקות ארגודיות $C_0,...C_{d-1}$. כל מחלקה היא אי-מחזורית.

לכן לפי הוכחת משפט 8 למקרה האי-מחזורי נקבל שקיים עבור כל i , $\lim P_{ii}{}^{(md)}=\hat{\pi}_i$

כמו-כן אם $i\in C_{l_1}$ ו $j\in C_{l_2}$ קיים $\lim P_{ij}{}^{(md+l_2-l_1)}=\hat{\pi}_j$

המשך הוכחת משפט 8 למקרה המחזורי :

נגדיר $\pi_i=\frac{1}{d}\hat{\pi}_i$ ונראה ש $\pi=(\pi_1,\pi_2,...)$ הוא וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד, במקרה הנשנה חיובית.

ראשית, ברור ש $\sum_i \pi_i=1$. שנית, נראה ש π סטציונרי. יש להראות $\pi_j=\sum_i \pi_i P_{ij}=\sum_{i\in C_0}\pi_j P_{ij}$

אם, $j\in C_1$ (בה"כ) עבור $i_0\in C_0$ נתבונן ב $P_{ij}{}^{(md+1)}=\sum_{i\in C_0}P_{i_0 i}{}^{(md)}P_{ij}$

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

מכיון $P_{ij}^{(md+1)} \to \hat{\pi}_j$ (כמו בהוכחת המקרה האי-מחזורי)

ומצד שני אגף ימין שואף ל $\sum_{i \in C_0} \hat{\pi}_i P_{ij}$

מקבלים $\hat{\pi}_j = \sum \hat{\pi}_i P_{ij}$

נחלק בd ונקבל את משוואת הסטציונריות ולבסוף נעיר שהוכחת היחודיות דומה לגמרי למקרה הלא מחזורי.

הוכחה אלטרנטיבית למקרה המחזורי :

הוקטור $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, ...)$ הוא וקטור סטציונרי עבור M^d ועבור כל מחלקה מחזורית C_l

מתקיים $\sum_{i \in C_l} \hat{\pi}_i = 1$ נראה ש $\hat{\pi}$ הוא גם וקטור סטציונרי עבור M.

מתקיים $\hat{\pi}M^{d+1} = \hat{\pi}MM^d = \pi M^d M = \hat{\pi}M$ כלומר $\hat{\pi}M$ הוא וקטור סטציונרי על M^d .

נשים לב שכל וקטור סטציונרי עבור M^d מקיים שקבוצת הרכיבים השייכים למחלקה ציקלית C_l מהוה וקטור סטציונרי עבור המטריצה המתאימה למחלקה C_l דהיינו מטריצה אי-פריקה, לא מחזורית ונשנית חיובית.

ולכן , אם הוקטור המתאים הוא וקטור הסתברויות כלומר סכום הרכיבים 1 והוא יחיד.

אבל $\hat{\pi}$ מוגבל ל C_l הוא וקטור הסתברויות וגם $\hat{\pi}M$ הוא וקטור הסתברויות לכן $\hat{\pi} = \hat{\pi}M$ עבור כל מחלקה C_l ולכן בכלל.

חלוקה ב d נותנת וקטור π כך ש $\pi_i = \dfrac{\hat{\pi}_i}{d}$ הוא וקטור הסתברויות סטציונרי.

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

מספר סופי של מצבים :

M מטריצה סטוכסטית , מספר סופי של מצבים.

<u>משפט</u>: כל מצב ארגודי הוא נשנה חיובית .

הוכחה : תהי C מחלקה ארגודית של מצבים $i,j\in C$ אז $1=\sum_{j\in C}P_{ij}^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{j\in C}\pi_j=1$ (המעבר לגבול כיוון שהסכום סופי)

לכן לפחות עבור j_0 אחד $\pi_{j_0}>0$ ולכן עבור כל j $\pi_j>0$

המצבים הלא ארגודים הם המצבים החולפים של השרשרת.

<u>משפט</u> : אם i מצב חולף וj מצב ארגודי $j\in C$ מחזור d מתקיים : $\lim P_{ij}^{(nd)}=f_{iC}\pi_j$

כאשר f_{iC} היא ההסתברות להגיע אי פעם מi לאחד המצבים של C

במקרה ש j חולף $\lim P_{ij}^{(n)}=0$

הוכחה : נסמן $f_{iC}^{(n)}$ את ההסתברות להגיע מ i למצב ב C בפעם הראשונה כצעד ה n-י

נסמן ב $f_{iCj}^{(n)}$ עבור מצב j את ההסתברות להגיע ל j ב n צעדים מבלי לעבור במצב כלשהו ב C

ברור ש $\sum_{j\in C}f_{iCj}^{(n)}=f_{iC}^{(n)}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty}f_{iC}^{(n)}=f_{iC}$

כעת עבור $n\geq m$: $P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l\in C}f_{iCl}^{(k)}P_{lj}^{(n-k)}\geq\sum_{k=1}^{m}\sum_{l\in C}f_{iCl}^{(k)}P_{lj}^{(n-k)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k=1}^{m}f_{iC}^{(k)}\pi_j\xrightarrow[m\to\infty]{}f_{ik}\pi_j$

לכן $\lim P_{ij}^{(n)}\geq f_{iC}\pi_j$

מצד שני $P_{ij}^{(n)}\leq\sum_{k=1}^{m}f_{iCl}^{(k)}P_{lj}^{(n-k)}+\sum_{k=m+1}^{n}f_{iC}^{(k)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi_j\sum_{k=1}^{m}f_{iC}^{(k)}+\sum_{k=m+1}^{\infty}f_{iC}^{(k)}\to\pi_j\sum_{k=1}^{\infty}f_{iC}^{(k)}$

($\sum_{k=m+1}^{\infty}f_{iC}^{(k)}\to 0$ זנב של טור מתכנס)

לכן $\lim P_{ij}^{(n)}\leq f_{iC}\pi_j$

טענה : קב מצבים סופית אז לא כל המצבים חולפים

מסקנה : שרשרת אי פריקה ומעל קב' מצבים סופית היא נשנית

נשים לב, בשרשרת אי-פריקה נשנית – לא משנה מצב המוצא תמיד נבקר במצב מסויים מספר אינסופי של פעמים אין תלות במצב התחלתי.

התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

תהליכי הסתעפות (*Branching Processes*)

נדון בתהליך המרקובי הומוגני הבא :

מרחב המצבים הוא המספרים השלמים האי שליליים. הסתברויות המעבר $P[X_{n+1} \mid X_n = m]$ מתפלגת כסכום של *m* משתנים מקריים $z_1,...z_n$ ב"ת ושווי התפלגות המקבלים ערכים שלמים אי שליליים . זאת במקרה ש $m \geq 1$ עבור $m = 0$

$P[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0] = 1$

נניח שהתפלגות $z_i = z$ היא קבועה ונסמן $P[z = m] = P_m$ ומתקיים $P_0 > 0$, $P_0 + P_1 < 1$

השרשרת היא בעלת מצב ארגודי יחיד "0"

נקרא לערך של X_n - "גודל האוכלוסיה בזמן *n*" נניח לשם פשטות $X_0 \equiv 1$

נחשב את התוחלת של X_n נסמן $\mu = E(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$, $\sigma^2 = Var(z)$

<u>משפט</u> : $E(X_n) = \mu^n$

הוכחה : עבור $n = 1$ המשפט נובע מההנחה $X_0 \equiv 1$.

נוכיח באינדוקציה $E(X_{n+1}) = E(E(X_{n+1} \mid X_n)) = E(X_n \mu)$

<u>משפט</u> : $Var(X_n) = \sigma^2 \dfrac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1}$ כאשר $\sigma^2 \neq 1$

הוכחה : עבור *n=1* , $Var(X_1) = \sigma^2$

נניח *n>1* באינדוקציה

$$Var(X_n) = E(Var(X_n \mid X_{n-1})) + Var(E(X_n \mid X_{n-1})) =$$
$$E(X_{n-1}\sigma^2) + Var(X_{n-1}\mu) = \mu^{n-1}\sigma^2 + \mu^2 Var(X_{n-1}) =$$
$$\mu^{n-1}\sigma^2 + \mu^2\sigma^2 \frac{\mu^{2n-3} - \mu^{n-2}}{\mu - 1} = \sigma^2(\mu^{n-1} + \frac{\mu^{2n-1} - \mu^n}{\mu - 1}) =$$
$$\sigma^2(\frac{\mu^n - \mu^{n-1} + \mu^{2n-1} - \mu^n}{\mu - 1}) = \sigma^2(\frac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1})$$

<u>משפט</u> : עבור $\mu = 1$, $Var(X_n) = n\sigma^2$

הוכחה : (קלה)

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

הכחדות (*Extinction*)

המאורע שעבור איזשהו n סופי $X_n=0$, נקרא הכחדות

נסמן ב g את הפונקציה היוצרת של המשתנה Z , $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nt^n$

<u>משפט</u> : תהי α ההסתברות להכחדות אז α מקיימת את המשוואה $\alpha=g(\alpha)$

הוכחה : בדור הראשון או שיש הכחדה או שיש $m\ge 1$ צאצאים שכל אחד מהם מתחיל תהליך הסתעפות בלתי תלוי בשאר הצאצאים וכל אחד מהתהליכים הוא בעל אותה הסתברות הכחדה α , סה"כ מקבלים

$$\alpha=p_0+p_1\alpha+p_2\alpha^2+..+p_m\alpha^m+..=g(\alpha)$$

<u>משפט</u> : למשואה $g(x)=x$ יש פתרון אחד או שניים , $x=1$ הוא תמיד פתרון

אם $x=1$ הוא פתרון אז יהי $\alpha=1$. אם קיים פתרון נוסף $\xi<1$ אז $\alpha=\xi$

לפני שנעבור להוכחה נמצא ביטוי לפונקציה היוצרת של X_n

לפי ההגדרה : $g_{x_1}=g$ נבטא את הפונקציה היוצרת של X_n באמצעות הפונקציה היוצרת של X_{n+1} :

$$g_{X_n}(t)=E(t^{X_n})=E(E(t^{X_n}\mid X_{n-1}))=E(g^{X_{n-1}}(t))=\sum_{m=0}^{\infty}p_m{}^{(n-1)}g^m(t)=g_{X_{n-1}}(g(t))$$

כאשר סימנו $P[X_{n-1}=m]=P_m^{(n-1)}$

לכן באינדוקציה נקבל $g_{X_2}=g(g(t))=g^{(2)}(t)$

$$g_{X_n}=g(g(....g))=g^{(n)}$$

הוכחת המשפט : הסדרה : $P[X_n=0]=\alpha_n\to\alpha$, מאחר ש $P[X_n=0]=g^{(n)}(0)$

נראה ש $g^n(0)\le\xi$ אם ξ הוא הפתרון הקטן ביותר $g(0)=P_0\le\xi$

ובאינדוקציה $g^{(n+1)}(0)=g(g^{(n)}(0))$ לכן $g^{(n+1)}(0)\le g(p_0{}^{(n)})\le g(\xi)=\xi$.

מאחר וg קמורה ו $g(1)=1$ ו $g(0)=P_0>0$ הרי שלישר $y=x$ יש לכל היותר עוד נקודת חיתוך עם $y=y(x)$

<u>משפט</u> : $\alpha<1$ אםם $\mu>1$

הוכחה :

א. אם $\alpha<1$ אז $\alpha=\xi=g(\xi)$ ואז $\frac{g(1)-g(\xi)}{1-\xi}=1$

ולפי משפט ערך הביניים קיים $\xi<\varsigma<1$ כך ש $f'(\varsigma)$. מכיוון שf קמורה נגזרתה עולה ממש (לא ליניארית !) לכן $\mu=g'(1)>1$

ב. נניח $g'(1)>1$ אז מכיוון ש $\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=1-P_0<1$ קימת בקטע $(0,1)$ נקודה ς שבה הנגזרת $g(\varsigma)$ שווה ל1 . לכן

$$\frac{g(1)-g(\xi)}{1-\xi}>1\Rightarrow 1-g(\xi)>1-\xi$$

$$g(\xi)<\xi$$

מכיוון ש $g(0)=0$ יש נקודת ביניים שבה מתקיים $g(\xi)=\xi$

התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

תהליכי מרקוב בזמן רציף

אוסף של מ"מ $X(t)$, $0 \le t < \infty$ נקרא תהליך בזמן רציף

נתחיל מתהליך מניה , מתבוננים בהתרחשות מסוג מסוים כגון התפרקות רדיו-אקטיבית, תאונות דרכים, קריאות טלפון וכו'.
$X(t)$ הוא מספר ההתרחשויות ברווח $[0,t]$
תהליך מניה יקרא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda > 0$ אם מתקיימות ההנחות הבאות :
א. $X(0)=0$
ב. $1-\lambda h + o(h) = P[X(t+h)=n \mid X(t)=n]$
ג. $\lambda h + o(h) = P[X(t+h)=n+1 \mid X(t)=n]$
ד. $o(h) = P[X(t+h) > n+1 \mid X(t)=0]$
ה. עבור כל סדרת זמן $t_1 < s_1 \le t_2 < s_2 ... \le t_n < s_n$ המ"מ-ים $\{X(s_i)-X(t_i)\}$ ב"ת

<u>משפט</u> : אם $\{X(t)\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ אז התפלגות $X(t)$ היא התפלגות פואסון עם פרמטר λt. כלומר :

$$k=0,1,2,... \ , P[X(t)=k] = \frac{(t\lambda)^k}{k!} e^{-t\lambda}$$

הוכחה : נחלק את הרווח $[0,t]$ לn רווחים שווים $[\frac{i-1}{n}t, \frac{it}{n})$ $i=1,...n$
ראשית נראה שההסתברות E, שבאחד האינטרוולים האלה יהיו יותר מהתרחשות אחת שואפת לאפס כאשר $n \to \infty$
נסמן ב E_i את המאורע שבקטע ה-i-י היתה יותר מהתרחשות אחת $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ולכן

$$P(E) \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} o(\tfrac{t}{n}) = no(\tfrac{t}{n}) \to 0$$

כעת נחשב את ההסתברות של k התרחשויות בקטע $[0,t]$ כך שבשום קטע לא היתה יותר מהתרחשות אחת

$$\binom{n}{k}\left(\frac{t}{n}\lambda + o(\tfrac{1}{n})\right)^k \left(1 - \frac{t}{n}\lambda + o(\tfrac{1}{n})\right)^{n-k} =$$

$$\left(\frac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!}\right)\left(\left(\frac{t\lambda}{n}\right)^k + o(\tfrac{1}{n})\right)\left(\frac{\left(1-\frac{t}{n}\lambda - o(\frac{1}{n})\right)^n}{\left(1-\frac{t}{n}\lambda - o(\frac{1}{n})\right)^k}\right) \to \frac{(t\lambda)^k}{k!} e^{-t\lambda}$$

מ.ש.ל

נשים לב שאם נגדיר את τ_1 כזמן ההתרחשות הראשונה אז $P[\tau_1 > t] - P[X(t)=0] = e^{-t\lambda}$ כלומר τ_1 מ"מ מעריכי בעל פרמטר λ על סמך האמור לעיל נוכל לקבל :

בניה של תהליך פואסון

תהי $Y_1, Y_2, ...$ סדרת מ"מ ב"ת שווי התפלגות מעריכית עם פרמטר λ נגדיר $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $n=0,1...$
הסכום S_n שואף בהסתברות 1 ל ∞ (נובע בקלות מהחוק החזק של המספרים הגדולים !) כעת נגדיר את התהליך $X(t)$ באופן הבא : $X(t)=0$ אם $t < Y_1$

$X(t) = n$ אם $S_n \le t < S_{n+1}$ $n=1,2,...$

נבדוק שהתהליך שהגדרנו מקיים את ההנחות של תהליך פואסון.
א. ברור
ב. נשתמש בתכונה הבאה של התפלגות מעריכית $P[Y > t+r \mid Y > t] = P[Y > r] = e^{-r\lambda}$ ולכן

$$P[X(t+h)=n \mid X(t)=n] = e^{-h\lambda} = 1 - h\lambda + o(h)$$

כדי להוכיח את התכונות הבאות נשים לב ש $P[X(t+h) \geq n+1 \mid X(t)=n] \leq e^{-\lambda h}$ ולכן
$P[X(t+h) > n+1 \mid X(t)=n] \leq e^{-\lambda h} e^{-\lambda h} = o(h)$ לכן נובע,

$$P[X(t+h) \geq n+1 \mid X(t)=n] \leq \lambda h + o(h)$$

$$P[X(t+h) > n+1 \mid X(t)=n] \leq (\lambda h + o(h))^2 \leq o(h)$$

ומכאן נובעות תכונות (ג), ו(ד)
התכונה (ה) נובעת מחוסר זכרון של התפלגות מעריכית

תהליך פואסוני לא הומוגני

תהי $\lambda(t) > 0$ $0 \leq t < \infty$ פונקציה חיובית אינטגרבילית בכל קטע סופי
נגדיר תהליך פואסון *X(t)* עם יוצר אינפיניטיסימלי $\lambda(t) > 0$

ראשית נציב $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ שנית, יהי *Y(t)* תהליך פואסון הומוגני $\lambda = 1$ נגדיר את התהליך *X(t)* ע"י $X(t) = Y(\Lambda(t))$

תכונות התהליך *X(t)* :

1. $P[X(t)=k] = \dfrac{\Lambda(t)^k}{k!} e^{-\Lambda(t)}$
2. בהנתן $t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 ... t_n < s_n$
המ"מ-ים $\{X(s_i) - X(t_i)\}$ ב"ת

<u>התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים</u>

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

תהליכי מרקוב בזמן רציף , מס' סופי או בן-מנייה של מצבים :

נתבונן בתהליך $X(t)$ עם התכונות הבאות :

1. $P[X(t+s)=j \mid X(t)=i]=P_{ij}(s)$ (הסתברויות מעבר הומוגניות)
2. הסתברויות מעבר לא תלויות בעבר (מרקוביות)
3. קיימים מספרים λ_i ו λ_{ij} עבור $i \neq j$ שליליים המקיימים $\sum_{i \neq j} \lambda_{ij}=\lambda_i$ כך ש $P_{ij}(h)=1-\lambda_i h+o(h)$
4. $P_{ij}(h)=\lambda_{ij}h+o(h)$ $i \neq j$

נבנה תהליך מרקוב עם התכונות האלו :

נתחיל עם מספרים $\lambda_i>0$, $\lambda_{ij} \geq 0$ נגדיר מטריצה סטוכסטית $q_{ij}=\dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$

יהיו $\{Y_n^{(i)}\}$ $n=1,2,..$ סדרות של מ"מ-ים שווי התפלגות ב"ת , כך $Y_n^{(i)}$ מתפלגים מעריכית עם פרמטר λ_i

נבחר את המצב ההתחלתי i בעזרת וקטור ההסתברויות $P=(p_i)$ כלומר נגדיר $P[X(0)=i]=p_i$

נגדיר את הסכום המקרי S_n באופן הבא :

בהסתברות p_i : $S_1=Y_1^{(i)}$

בהסתברות q_{ij} : $S_2=Y_1^{(i)}+Y_2^{(j)}$

ובאופן אינטואיטיבי , בהנתן ש $S_{n+1}=S_{n-1}+Y_n^{(i)}$ נקבל $S_{n+1}=S_n+Y_{n+1}^{(i)}$ בהסתברות q_{ij}

תיאור אינטואיטיבי של הבניה : כאשר נמצאים במצב i שוהים בו זמן מעריכי $Y^{(i)}$ בעל פרמטר λ_i. בתום הזמן עוברים למצב אחר j בהסתברות q_{ij}

שוב מנצלים את חוסר הזכרון של ההתפלגות המעריכית להוכיח שהתהליך המתקבל הוא בעל התכונות הדרושות

מערכת משוואות צ'פמן-קולמוגורוב

$$P_{ij}(t+h)=\sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(h)$$

לכן $P_{ij}(t+h)=P_{ij}(t)(1-\lambda_j h+o(h))+\sum_{k \neq j} P_{ik}(t)(h\lambda_{kj}+o(h))$

ולכן $\dfrac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\lambda_j P_{ij}(t)+P_{ik}(t)\lambda_{kj}+o(h)$

לכן $P'_{ij}(t)=-P_{ij}(t)\lambda_j+\sum_{k \neq j} P_{ik}\lambda_{kj}$

נסמן ב $\Lambda=\left(\lambda_{ij}\right)$ כאשר $\lambda_{ii}=-\lambda_i$

נקרא למטריצה Λ היוצר האינפיניטיסמלי של התהליך נסמן את המטריצה $P(t)=\left(p_{ij}(t)\right)$ ו $P'(t)=\left(p'_{ij}(t)\right)$

ונקבל את המשוואה המטריציאלית $P'(t)=P(t)\Lambda$

למעשה מה שקיבלנו הוא מערכת משוואות דיפרנציאליות

הסתברות סטציונריות :

התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

נניח ש π הוא וקטור הסת' סטציונרי , צריך להתקיים עבור כל $h>0$ $\sum_i \pi_i P_{ij}^{(h)} = \pi_j$ כלומר

$\sum_{i \neq j} \pi_i \lambda_{ij} h + o(h) + \pi_j (1 - \lambda_j h + o(h)) = \pi_j$ נחלק ב h ונשאיף את $h \to \infty$ ונקבל $\sum_j \pi_i \lambda_{ij} = 0$ כלומר הוקטור הסטציונרי פותר את מערכת המשוואות $\pi\Lambda = 0$

התיאוריה של שרשרות מרקוב הומוגניות עם מספר בן-מנייה של מצבים

מאת: פרופ' מאיר סמורודינסקי

נספח : הילוך מקרי סימטרי בתלת-מימד

הילוך מקרי מהווה תהליך מרקובי

$p_{ab} = P(X_{n+1} = a \mid X_n = b) = \begin{cases} \frac{1}{6}, |a-b| = 1 \\ 0, o/w \end{cases}$ באשר a,b קודקודים על גבי שריג Z^3

לפי משפט : 0 הוא מצב נשנה אמם $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}{}^{(n)} = \infty$

ברור ש $p_{00}{}^{(2n+1)} = 0$ לכל n

לכן $\sum_{n}^{\infty} p_{00}{}^{(n)} = \sum_{n}^{\infty} p_{00}{}^{(2n)}$

נתבונן ב $p_{00}{}^{(2n)}$: אם חזרנו מ0 אל 0 תוך $2n$ צעדים בהכרח מספר צעדים מעלה (נסמנו j) שווה למספר צעדים מטה , כמו-כן מספר צעדים שמאלה (נסמנו k) שווה למספר צעדים ימינה

כלומר : $p_{00}{}^{(2n)} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=}^{n-j} \frac{2n!}{j!k!(n-j-k)!j!k!(n-j-k)!}$

$$= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{2n!(n!n!)}{j!k!(n-j-k)!j!k!(n-j-k)!(n!n!)} = \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \left(\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2$$

$$= \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{i, j, n-j-i}^2 \le \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}}^2$$

$\binom{n}{i, j, n-j-i} \le \binom{n}{\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}}$ מדוע ? נתבונן בפונקציה $f(x,y) = \frac{n}{xy(n-x-y)}$

$0 \le x + y \le n$

לפי נגזרות חלקיות והפעלת שיקולי סימטריה... –כש $x = y = \frac{n}{3}$ מתקבל מקסימום

נשתמש בקירוב סטירלינג : $n! \cong \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$

אז עבור $\binom{2k}{k} \cong \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}$, ועבור $\binom{3k}{k, k, k} \cong \frac{\sqrt{2\pi 3k} \left(\frac{3k}{e} \right)^{3k}}{(2\pi k)^{3/2} \left(\frac{k}{e} \right)^{3k}} = \frac{\sqrt{3} 3^{3k}}{2\pi k}$

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_i \sum_j \frac{1}{3^{2n}} \binom{n}{\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}}^2 \cong \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_i \sum_j \frac{1}{3^{2n}} \left(\frac{3\sqrt{3} 3^n}{2\pi n} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_i \sum_j \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi n} \right)^2 \le \frac{\frac{27}{4}}{(\pi n)^{3/2}}$$

ידוע ש $\sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ לכן $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}{}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}{}^{(2n)} < \infty$ והדבר שקול ל:מצב '0' חולף.