

## פתרון לבחינה מ 24.01.18

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ד	א	ד	א	ג	ב	ד	א	א	ד	א	ג	ד	ג	ב	ב

### הסברים קצרים

#### שאלה 1

$$. P(X = 3) = \binom{3-1}{2-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \quad \text{ולכן } X \sim NB\left(2, \frac{1}{6}\right)$$

#### שאלה 2

גם  $Z \sim NB\left(2, \frac{1}{6}\right)$  כאשר הזמן עד קבלת 4 ראשון מתפלג  $G\left(\frac{1}{6}\right)$  והזמן עד ה 5 הראשון שבא אחריו גם מתפלג  $G\left(\frac{1}{6}\right)$ .

#### שאלה 3

הזמן עד קבלת 4 או 5 מתפלג  $G\left(\frac{2}{6}\right)$ . לאחריו מחכים לתוצאה מבין השתיים שעדיין לא התקבלה. לזמן זה יש התפלגות  $G\left(\frac{1}{6}\right)$ .

#### שאלה 4

לאחר שמתקבל 4 ראשון, אם מתקבל 4 נוסף לפני שמתקבל 5, אז מחכים לקבלת 5 ראשון שלאחריו. אם מתקבל 5 לפני 4 נוסף אז מחכים לקבלת ה 4 הראשון שלאחריו. בכל מקרה התפלגות הזמן עד קבלת ערכו של המשתנה הנוסף היא  $G\left(\frac{1}{6}\right)$ .

#### שאלה 5

$$P(e^X > 2) = P(X > \ln(2)) = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}$$

#### שאלה 6

בהסתברות חצי  $X$  מתפלג  $U(-1,0)$  ובהסתברות חצי  $X$  מתפלג  $U(-1,0)$ . בכל אחד מהמקרים התוחלת היא 0.5.

### שאלה 7

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 3 + 3^2 \text{ ולכן } V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

### שאלה 8

סדרת המשתנים  $\{Y_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$  היא סדרת משתנים ב"ת. סדרת המשתנים  $\{Y_{2i-1}\}_{i=1}^{\infty}$  היא סדרת משתנים ב"ת. לכל אחד מהמשתנים שבסדרות יש שונות סופית. לכן על כל אחת משתי הסדרות חל החוק החלש. לכן עבור כל  $\varepsilon$  חיובי נתון, ההסתברות שהממוצע המצטבר של אחת מהן יסטה ביותר מ  $\varepsilon/2$  שואפת לאפס כאשר מספר המאורעות שואף לאין סוף. מתקיים למשל  $P(Y_8 = 1 | Y_7 = 1) = 0.5 \neq 0.25 = P(Y_7 = 1)$ . לכן אין אי תלות.

$$V(Y_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = V(X_i) : 1 \leq i < \infty$$

### שאלה 9

תוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות. מדובר בסכום של משתנים אחידים.

### שאלה 10

$$P(X + Y = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1)$$

### שאלה 11

$$P(X = Y) = P(X = Y = 1) + P(X = Y = 2) + P(X = Y = 3)$$

### שאלה 12

נניח שבהסתברות חצי מתרחשים סימולטנית כל המאורעות להוציא  $A_2$ , כאשר המאורע  $A_2$  הוא ריק. במקרה זה  $A_2$  ב"ת בכל מאורע. אבל כל מאורע אחר בסדרה תלוי במאורע  $B$ .

### שאלה 13

מתקיים

$$P(Z = 0 | W > 100) = \frac{P(Z = 0)P(Y > 100)}{P(Z = 0)P(Y > 100) + P(Z = 1)P(X > 100)} =$$

$$= \frac{0.5e^{-0.5 \cdot 100}}{0.5e^{-0.5 \cdot 100} + 0.5e^{-1 \cdot 100}} \cong 1$$

לכן אם מתקיים  $(W > 100)$ , אז בסיכוי קרוב מאוד ל 1, מתקיים  $(Y > 100)$ . לפי תכונת חוסר הזכרון של התפלגות מעריכית מתקיים  $E(Y | Y > 100) = 100 + E(Y) = 102$ .

### שאלה 14

לפי הטיעונים של שאלה 13, בהינתן  $(W > 100)$ , מתקיים בסיכוי קרוב מאוד ל 1 ש  $(Z = 0)$ .

לכן בהסתברות קרובה מאוד ל 1, יש למשתנה  $X$  את התפלגותו ותוחלתו המקוריים.

### **שאלה 15**

אם בהסתברות 1 נצבע את כל הקשתות בכחול, אז בהסתברות 1 כל המאורעות יתרחשו, וסכום ההסתברויות של המאורעות יהיה 4.

### **שאלה 16**

ההסתברות של איחוד מאורעות שווה לסכום ההסתברויות של המאורעות אם ורק אם הסתברויות החיתוכים של המאורעות שוות לאפס.  
אם לפחות שתי קשתות הן ירוקות, אז לכל היותר בצומת אחד לא נוגעת קשת ירוקה ורק מאורע אחד מבין הארבעה יכול להתרחש. אם אין קשתות ירוקות או שיש קשת ירוקה אחת, אז מתרחשים סימולטנית לפחות שני מאורעות. לכן, כדי שבהסתברות האיחוד תהיה שווה לסכום ההסתברויות אפשר לבחור בכל צביעה מתוך  $2^6 = 64$  הצביעות חוץ מהצביעה שבה כל הקשתות כחולות ו  $\binom{4}{2} = 6$  הצביעות שבהן יש קשת ירוקה אחת.

---

שלומי