

אוניברסיטת ת"א
פקולטה להנדסה
בית הספר להנדסה מכנית

מועד א', סמסטר א', תש"ע,
מועד הבחינה: 14.2.10
משך הבחינה: 3 שעות
הבחינה כוללת 9 עמודים

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

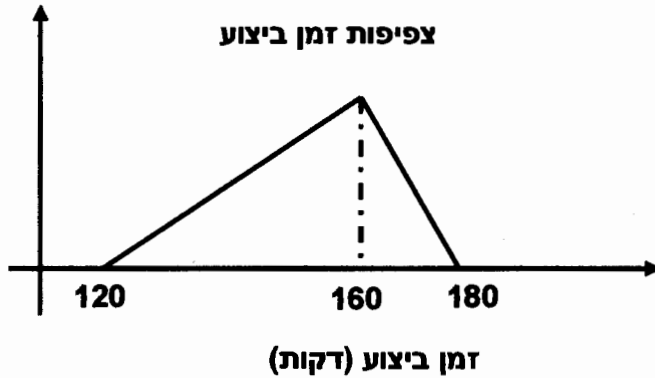
הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
 - ארבעה דפי סיכום.
 - מחשבון.
 - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה 6 שאלות. עליכם לענות על כל הסעיפים במקום המצורף בטופס:
 - שאלות 1-4 הינן שאלות פתוחות. הניקוד לכל סעיף רשום בכל שאלה. עליכם לספק הסברים ונימוקים לפתרון כדי לקבל ניקוד מלא.
 - שאלות 5-6 הן אמריקאיות ותיבדק רק תשובה סופית.
- סך הנקודות הוא 105, אך הציון המקסימאלי האפשרי הוא 100.
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.

בהצלחה !

שאלה 1 (28 נקודות – כל סעיף 7)

דוקטורנט בפסיכולוגיה עושה ניסוי ומזמין סטודנטים להנדסה להשתתף בניסוי. הוא יודע מניסויים קודמים שעשה שצפיפות זמן הניסוי הינה:



א. איזה אחוז מהפונים יסיימו את הניסוי בתוך 160 דקות (לכל היותר)?

הצב'ת בקצה 160 כ"א a , מתק"ם

$$\int_{120}^{160} f_x(x) dx = \frac{a}{2} \cdot 40 = 20a$$

מתק"ם, $\int_{160}^{180} f_x(x) dx = 10a$

הסתכלת במחלקת כ"א

$$\frac{20a}{20a + 10a} = \frac{2}{3}$$

ב. מה הן תוחלת וסטיית התקן של התפלגות הזמן?

מתק"ם $20a + 10a = 1$

אז $120 \leq x \leq 160$ מתק"ם

אז $160 < x \leq 180$ מתק"ם

מתק"ם $E(x) = \int_{120}^{180} f_x(x) x dx \approx 153.33$

כ"א $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

כ"א $E(x^2) = \int_{120}^{180} f_x(x) x^2 dx = \dots$

כ"א $G(x) = \sqrt{V(x)} \approx 12.5$

כ"א $a = \frac{1}{30}$

כ"א $f_x(x) = \frac{x-120}{30 \cdot 40}$

כ"א $f_x(x) = \frac{180-x}{30 \cdot 20}$

ג. ביום מסויים מגיעים 5 אנשים. מה הסיכוי שלכל היותר ל- 3 מביניהם לקח יותר מ- 160 דקות לבצע המשימה?

פ' 2- מספר האנשים שאקח עימם יותר מאשר 160 דקות.

$$P(Z \leq 3) = 1 - P(Z=5) - P(Z=4) =$$

$$= 1 - \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} \approx 0.95$$

ד. הדוקטורנט מתכנן ניסוי שבו ישתתפו 120 סטודנטים. מה הסיכוי שהזמן הממוצע שלהם יהיה גדול מ- 155 דקות?

זמן שאקח את כל ה- 120 תלמידי מ
ואונת σ^2 . ערכים אלה ממוצעים ומסע

ב. נשתמש במשט בקודם במרכז כנ"ל אקלים
(פיתוח מקומי)

$$1 - \Phi\left(\frac{155 - \mu}{\sigma/\sqrt{120}}\right) = \dots \approx 0.07$$

שאלה 2 (28 נקודות - כל סעיף 7)

בעקבות המודעה שמפרסם הדוקטורנט מהשאלה הקודמת פונים סטודנטים לקבל מידע. קצב הפניות הוא פואסוני עם תוחלת של 5 פניות ביום.

70% מהפונים הם גברים. הסיכוי שגבר שפנה יגיע לניסוי הוא 60% והסיכוי שאישה שפנתה תגיע לניסוי הוא 40%.

א. מה הסיכוי שביום מסוים יהיו פחות מ-2 פניות?

ב' X - מספר הפניות ביום מסוים

$$P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-5} + e^{-5} \cdot 5 \approx 40.47\%$$

ב. מהו אחוז הנשים שישתתפו בניסוי?

$$\frac{P(\text{אישה}) \cdot P(\text{ג'יע} | \text{אישה})}{P(\text{אישה}) \cdot P(\text{ג'יע} | \text{אישה}) + P(\text{גבר}) \cdot P(\text{ג'יע} | \text{גבר})} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4} = \frac{2}{9}$$

ג. אם ביום מסוים מגיעים 6 אנשים לעשות את הניסוי, מהי תוחלת מספר הנשים ביניהם?

$6 \cdot \frac{2}{9}$

(כל בריט שפנה לניסוי, הסיכוי $\frac{2}{9}$ מספר הנשים מקרב פשוטות פנימי ג'יעה ג'יעה).

ד. חציון זמן הביצוע הוא כ-155 דקות ואחוזון 25 הוא כ-145 דקות. ביום מסוים מגיעים 10 אנשים לניסוי. מה הסיכוי שבדיוק 3 מהם יסיימו את הניסוי בפחות מ-145 דקות ושבדיוק 4 יסיימו בזמן העולה על 155 דקות?

$$\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \binom{10-3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^3 \approx 6.47\%$$

(פיתוחים סכימתיים של שאלה)

שאלה 3 (21 נקודות - כל סעיף 7)

במבצע חיסול עורך סופרמרקט מבצע מכירות של יינות אדומים ב-30 ש"ח ויינות לבנים ב-25 ש"ח. על המדפים מסודרים 100 בקבוקי יין אדום ו-75 בקבוקי יין לבן. מר ירדני מגיע מיד לאחר שסיימו לסדר את המדפים ובוחר באקראי 3 בקבוקים.

א. מה ההסתברות שמר ירדן יקנה את שני סוגי היינות?

$$1 - \frac{\binom{100}{3}}{\binom{100+75}{3}} - \frac{\binom{75}{3}}{\binom{100+75}{3}} \approx \frac{\binom{75}{2} \binom{100}{1} + \binom{75}{1} \binom{100}{2}}{\binom{175}{3}}$$

$$\approx 73\% \quad (\text{הסתברות הפרימלית})$$

ב. מהן תוחלת וסטיית תקן עלות בקבוקי היין שיקנה? (רמז: רשמו את עלות הבקבוקים כפונקציה של מספר הבקבוקים של יין אדום שיקנה).

י"ב' X מספר בקבוקי יין אדום שיקנה, י"ב' Z העלות

$$Z = 30X + 25(3-X) = 75 + 5X \quad (\text{הפרימלית})$$

$$E(Z) = E(75 + 5X) = 75 + 5 \cdot E(X) \stackrel{\text{י"ב'}}{=} 75 + 5 \cdot 3 \cdot \frac{100}{175} \approx 83.6$$

$$G(Z) = \sqrt{V(Z)} \approx 4.3$$

$$V(Z) = V(75 + 5X) = V(5X) = 25V(X) = 25 \cdot 3 \cdot \frac{100}{175} \cdot \frac{75 \cdot 175 - 3 \cdot 175^2}{175^2}$$

ג. אם ידוע שיש למר ירדני בקבוק יין אדום בעגלת הקניות, מה הסיכוי שכל בקבוקי היין הינם של יין אדום?

A - אבות בקבוק יין אדום

B - כל בקבוקי היין הם יין אדום

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\binom{100}{3} / \binom{175}{3}}{1 - \binom{75}{3} / \binom{175}{3}} = 19.9\%$$

שאלה 4 (14 נקודות - כל סעיף 7)

התפלגות הציונים בבחינה הפסיכומטרית של סטודנטים שהתקבלו לפקולטה למשפטים באוניברסיטה מסוימת היא נורמאלית עם תוחלת 700 וסטיית תקן 25.

א. לאיזה אחוז מהסטודנטים ציון גבוה מ-750 בבחינה?

$$1 - \Phi\left(\frac{750-700}{25}\right) \approx 0.023$$

ב. מה הסיכוי שמבין 200 הסטודנטים שהתקבלו לכל היותר ל-10 היה ציון גבוה מ-740?

כפי כו' של תלמי'ם בארצ'ם אקדמ'ם ציון גבוה מ-740
כפי כו' 740

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{740-700}{25}\right)$$

ציון גבוה מ-740 יותר מ-10 תלמי'ם יקדמו

ציון גבוה יותר מ-740

אם ההסתברות בהתקדמות היא

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{200}{k} p^k (1-p)^{200-k}$$

(אם הפיתוח בתקון רצ'ים)

שאלה 5 (7 נקודות)

הזמן עד לתקלה של רכיב חשמלי מתפלג מעריכי עם תוחלת של 100 שעות. נגדיר את המאורעות:

- A – הרכיב יעבוד יותר מ-75 שעות.
- B – הרכיב יעבוד יותר מ-100 שעות.

מה ניתן לומר על המאורעות ?

- א. בגלל תכונת חוסר הזכרון A ו-B ב"ת.
- ב. למרות תכונת חוסר הזכרון A ו-B ב"ת.
- ג. A ו-B תלויים.
- ד. A ו-B זרים.

$$P(A \cap B) \stackrel{BCA}{=} P(B) = e^{-1} \neq P(A) \cdot P(B)$$

אם הם תלויים

שאלה 6 (7 נקודות)

יותם מעוניין לבנות רווח בר-סמך לתוחלת זמן תהליך כימי מסויים. רווח הסמך מתוכנן להיות ברמת סמך של 90% על סמך מדגם של 50 נסיונות. המנחה של יותם מציע לו לבנות רווח ברמת סמך של 95%. כדי שהרווח יישאר באותו אורך יותם צריך:

- א. לא לעשות כלום.
- ב. להגדיל גודל מדגם.
- ג. להקטין גודל מדגם.
- ד. לשנות את ההתפלגות שבה הוא משתמש כדי לבנות רווח בר-סמך.

צ'יב' יותר נתל'ם כז'י אצ"ק י'צר ,
אמ'י