

מועד ב', סמסטר ב', תשס"ז,
תאריך הבחינה: 19.10.07
משך הבחינה: 3 שעות

אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
בית הספר לפיזיקה

הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

תעודת זהות: _____

לשימוש הבודקים:

1

2

3

4

סה"כ

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם
מחוץ לאתר של שלומי.

אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
בית הספר לפיזיקה

מועד ב', סמסטר ב', תשס"ז,
תאריך הבחינה: 19.10.07
משך הבחינה: 3 שעות

הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
 - בארבעה דפי סיכום.
 - מחשבון.
 - טבלאות של התפלגות נורמלית והתפלגות חי בריבוע.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה רשום ליד כל שאלה (הסכום המקסימאלי הוא 105, אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.
- פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

בהצלחה !

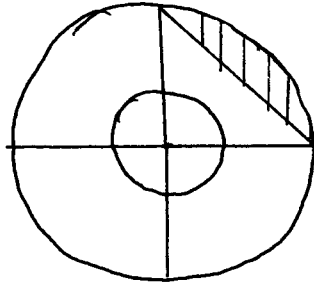
שאלה 1 (23 נקודות: סעיף א' - 5 נקודות; השאר - 6 נקודות):



מגרילים באקראי נקודה מהטבעת השחורה: מרכז שני העיגולים הוא ב- (0,0), לעיגול הקטן רדיוס של 5 ס"מ, ולגדול רדיוס של 10 ס"מ.

א. מהי הצפיפות המשותפת?
 שטח הטבעת הוא
 $\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 75\pi$
 כנבנות במשותף הוא
 מחוצה לטבעת.
 קיטק הטבעת ואפס
 $\frac{1}{75\pi}$

ב. מה הסיכוי שמתוך 20 נקודות שנבחרות באקראי, 2 בדיוק יקיימו $X + Y > 10$?



מבוקר עם נקודות קתומם שסמנת' שטחו
 $S = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} - \frac{10 \cdot 10}{2}$
 מכיון שהנקודות נבחרו באופן אחיד הטבעת אל' עגל'
 כל נקודה חזרה בהסתברות הוא
 $p = \frac{S}{75\pi}$
 מספר הנקודות ש'פיו קתומם מתפלג
 בהסתברות במקרה הוא
 $B(20, p)$
 $\binom{20}{2} \cdot p^2 (1-p)^{18} = \dots$

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם
 מחוץ לאתר של שלומי.

ג. האם X ו-Y בלתי-תלויים או תלויים? נמקו.

הם תלויים כי אמא:

$$P(X > 8, Y > 9) = 0 \neq P(X > 8) \cdot P(Y > 9)$$

אז: התאם שבו פקוצה נחמת אינו מאזני

ד. נבחר עשר נקודות באקראי מהטבעת. מה הסיכוי שמרביע כלשהו לא תיבחר אף נקודה?

כל נקודה נחמת קכל אחז מפרקיע'ם קס'כו $\frac{1}{4}$ קאלן
לסת' תלנו באחרות. נ'תן עפקין את פאלטה דסת' צוכ'א.
אל מוצקר קרע'ס מסו'ם, אמא פה'לסון, אל פהסתרות
פ'אל $(\frac{3}{4})^{10}$ שכל פקוצות ידחרו מרע'ים אחרים.
אל פכונה שלמות קא'צפה קרע'ס אל תדחר אל נקוצה
אל קהסתק'ם ע'קרון פהכלה ופהכרצ'ה לח'שוק פהסתרות
א'חוצ מאורעות נקכל שפהסתרות פ'אל:

$$\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right)^{10} - \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right)^{10} + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{4-3}{4}\right)^{10} = \dots$$

שאלה 2 (23 נקודות: סעיף ד' 5 נקודות; השאר – 6 נקודות):

בכדי להעריך נפח תנועה בכביש מסויים, מונח כבל שמונה את המכוניות. הכבל מונח במשך 150 ימים (נפחי התנועה בימים שונים ב"ת). התוחלת היא 180 מכוניות לשעה בין השעות 6 – 10 בבוקר ו- 15 – 19. בשאר היממה התוחלת היא 60 מכוניות לשעה. אין תלות בין מספר המכוניות בשעות שונות.

א. יהי X_i מספר המכוניות הכולל ביום ה- i . מהן התוחלת וסטיית התקן של X_i ? באיזה מודל הנכם משתמשים ומדוע?

פאונד הפוטאסון שמ"צ זכ"מ מסומנת, כך שאין תלות בין המתמט קטעו זמן שונים, תוחלת מספר פעגרות ג'ום פ'א:

$$4 \cdot 180 + 4 \cdot 180 + 16 \cdot 60 = 2,400$$

אכן פתבטאת מספר פעגרות ג'ום פ'א $(2,400)$ ס'כ'ים משתנים פוטאסונים ג'אתי תלויים מתפלג פטאסונת ונבדלר ש פפתבטאת שולר את תוחלת סטיית פיתקן פ'א $\sqrt{2,400}$

ב. מה הסיכוי שמספר המכוניות הממוצע ביום (ממוצע על פני 150 הימים) קטן מ- 2412?

שתמש ג'מפט פ'גדום פ'מרכז'י, נקלה פסתגרות מקורתי:

$$\Phi\left(\frac{2412 - 2400}{\sqrt{\frac{2400}{150}}}\right) = \Phi(3) \approx 1$$

ג. מה הסיכוי, שבשעות העומס, מכונית תעבור את הכבל יותר מחצי דקה לאחר המכונית הקודמת?

קצוות העומס הפמן ג'ן מאקר של מכלית למאקר של
 הפאה אחריה מתבלט $\left(\frac{180}{60}\right)$ קאש ק'ולצות של זקה.
 הפסתיות הפאוקסת היא $e^{-3 \cdot \frac{1}{2}}$

ד. בבוקר מסוים עברו 125 מכוניות בין השעות 10-12. מה הסיכוי שבין השעות 11-13 תעבור אותה כמות של מכוניות? פשטו כמה שניתן, אבל אין צורך להגיע למספר.

זכר הפאוקר'ים קאש מתבלט $\mu(60)$ וקצות'ים $\mu(120)$,
 זרוש של 12-13 יאקרו אולא מסבר כמו ק 10-11,
 ק פינתן של 10-12 אקרו 125 מכליות, הפסתיות
 הפאוקר'ים של 10-11 ק נתנה על פ נוסחת הפסתיות

$$P\left(\begin{matrix} \text{אקרו } k \\ 10-11? \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \text{אקרו } 125 \\ 12-13? \end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix} \text{אקרו } k \\ 10-11? \end{matrix}\right) \cdot P\left(\begin{matrix} \text{אקרו } 125-k \\ 14-12? \end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix} \text{אקרו } 125 \\ 10-12? \end{matrix}\right)} = \frac{\frac{e^{-60} \cdot 60^k}{k!} \cdot \frac{e^{-60} \cdot 60^{125-k}}{(125-k)!}}{\frac{e^{-120} \cdot 120^{125}}{125!}} = \dots = \binom{125}{k} \cdot 0.5^{125}$$

(ההסתברות הפאוקר'ים היא $B(125, 0.5)$)

ההסתברות ש'אקרו א מכליות ק 12-13 היא $\frac{e^{-60} \cdot 60^k}{k!}$.
 לכן על נוסחת ההסתברות הפאוקר'ים, ההסתברות הפאוקר'ים
 היא: $\sum_{k=0}^{125} \binom{125}{k} \cdot 0.5^{125} \cdot \frac{e^{-60} \cdot 60^k}{k!} = \dots$

שאלה 3 (24 נקודות – כל סעיף 6 נקודות):

רוכב אופניים יוצא בכל בוקר בשעה 8:00. הוא רוכב 45 ק"מ, עושה הפסקה של חצי שעה, ואז רוכב 30 ק"מ נוספים. בכל בוקר הוא בוחר את הזמן X בו יעבור את 45 הק"מ הראשונים, כאשר X מתפלג אחיד על $(1.5, 2)$. את 30 ק"מ הבאים הוא עובר בזמן Y שהוא בוחר מההתפלגות האחידה על $(1, 1.5)$. X ו- Y בלתי-תלויים. (הערה: המהירות בכל קטע היא קבועה כל יום, אך משתנה מיום ליום).

א. יהי T זמן ההגעה ליעד. מהי התוחלת של T ?

קקיבוקי: $8 + \frac{1.5+2}{2} + 0.5 + \frac{1+1.5}{2} = 11.5$

ב. מה הסיכוי שביום מסוים יגיע לפני השעה 11:15?

קקיבוקי $P(X+Y < 2.75)$

$$P(X+Y < 2.75) = \int_{1.5}^{1.75} \int_1^{2.75-x} 4 \, dy \, dx = \int_{1.5}^{1.75} (7-4x) \, dx =$$

$$= 1.75 - \int_{1.5}^{1.75} x \, dx = 1.75 - 2 \left[x^2 \right]_{1.5}^{1.75} = \frac{1}{8}$$

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם
מחוץ לאתר של שלומי.

שאלה 4 (35 נקודות: סעיף ו' - 5 נקודות; שאר הסעיפים - 6 נקודות):

להלן חוקי משחק: במיכל 30 כדורים שחורים ועליהם המספרים 1-30, ו-20 כדורים לבנים ועליהם המספרים 1-20. בכדי לשחק, משתתף צריך לבחור צבע ומספר ולשלם 5 ש. לאחר מכן, כדור נבחר באקראי. אם המשתתף צדק לגבי הצבע בלבד יקבל חזרה 1 ש; אם צדק לגבי המספר בלבד יקבל חזרה 4 ש; אם צדק לגבי שניהם יקבל חזרה 10 ש. גיא מחליט לנחש תמיד צבע לבן ומספר 20.

א. מהי הסיכוי שגיא יקבל חלק מכספו בחזרה?

$$\frac{21}{50}$$

(יש 20 כדורים לבנים ו-10 כדורים שחורים)
 (20)

ב. מה התפלגות הרווח הנקי של גיא במשחק בודד?

הסתברות $\frac{29}{50}$ פסל כלל אלא יקרא היתר

והרווח הנקי יפ'ה -5.

הסתברות $\frac{1}{50}$ פסל יקרא היתר 4

והרווח הנקי יפ'ה -1.

הסתברות $\frac{19}{50}$ כרווח הנקי יפ'ה

הסתברות $\frac{1}{50}$ $-5+1=-4$

יפ'ה $-V$ כרווח הנקי יפ'ה $-5+10=5$

$$P(V=-5) = \frac{29}{50}, P(V=-1) = \frac{1}{50}, P(V=-4) = \frac{19}{50}, P(V=5) = \frac{1}{50}$$

ג. מהן תוחלת וסטיית התקן של הרווח הנקי של גיא ב-20 משחקים?

קמחוק קוצב תוחלת הרווח V - פיל: פיל:

$$E(V) = \frac{29}{50} \cdot (-5) + \frac{1}{50} \cdot (1) + \frac{19}{50} \cdot (4) + \frac{1}{50} \cdot 5$$

אס"ת התקן:

$$G(V) = \sqrt{\frac{29}{50} \cdot (-5)^2 + \frac{1}{50} \cdot (1)^2 + \frac{19}{50} \cdot (4)^2 + \frac{1}{50} \cdot 5^2 - (E(V))^2}$$

ק 20 מחקים התוחלת פיל $E(V)$ וקלסם שפיהוול'ם
 קמחוק'ם שונ'ם הם ללתי תלוי'ם אל סט"ת התקן
 פיל $\sqrt{20} \cdot G(V)$

ד. יהי X משתנה מצוין שגיא יצדק בצבע במשחק בודד ו- Y משתנה מצוין שיצדק במספר במשחק בודד. האם X ו- Y תלויים או בלתי תלויים?

הם תלוי'ם:

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{50} \neq \frac{20}{50} \cdot \frac{2}{50} = P(X=1) \cdot P(Y=1)$$

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם
 מחוץ לאתר של שלומי.

ה. מהו מקדם המתאם בין X ו- Y ?

$$\rho(x, y) = \frac{E(xy) - E(x) \cdot E(y)}{\sqrt{V(x) \cdot V(y)}}$$

כאשר כאן $E(xy) = \frac{1}{50}$, $E(y) = \frac{2}{50}$, $E(x) = \frac{20}{50}$

$V(y) = \frac{2}{50} \cdot \frac{48}{50}$, $V(x) = \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{50}$

(השונות של X ושל Y נחשבת לפי הנוסחה לשינוי של אינצ'וקר'ים.)

1. גיא רוצה לבדוק אם אכן קיימת בחירה מקרית של הכדורים. לצורך פשוטות הוא מחליט לספור כמה פעמים יתקבלו כדורים שחורים עם המספרים 21 - 30 ב- 150 משחקים. גיא סופר 50 פעמים בהם התקבלו כדורים שחורים עם המספרים 21 - 30. נסחו השערות ובדקו ברמת מובהקות של 5%.

$$H_0: p = \frac{10}{50}$$

$$H_1: p \neq \frac{10}{50}$$

שתים נמדדו טווח ההתאמה.

תחת השערת האפס, ותחלת מספר הנבחרים היא 10

21-30 היא $150 \cdot \frac{1}{5} = 30$ ותחלת מספר הנבחרים היא 120

ז'סט'טי' פ'ט'ל:

$$\frac{(50-30)^2}{30} + \frac{(100-120)^2}{120} = 16 \frac{2}{3}$$

זה מתחיל עם טבלת χ^2 עם ציגה חופש אולגה

נצדף את M_0 עבור רמת מובהקות של 5%.