

אוניברסיטת תל אביב  
הפקולטה למדעים מדויקים  
בית הספר לפיזיקה

מועד ב', סמסטר ב', תשס"ה,  
תאריך הבחינה: 31.08.05  
משך הבחינה: 3 שעות

### הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
  - בשני דפי סיכום.
  - מחשבון.
  - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה רשום ליד כל שאלה (הסכום המקסימאלי הוא 105, אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- לרשותכם מחברת בחינה שמשמשת כטיוטה. מחברות אלו יוחזרו אך לא ייבדקו.
- פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

**בהצלחה !**

שאלה 1 (33 נקודות: סעיפים א, ה, ו - 5 נקודות; סעיפים ב - ד - 6 נקודות)

חמישה חברים יוצאים למחנה, ולחמישתם שק שינה כחול (עם שם). בחזרה הביתה כל אחד מחזיר שק שינה שלקח באופן מקרי מתוך חמשת שקי השינה.

א. מה הסיכוי שכל החמישה חוזרים הביתה עם שק שינה נכון?

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

(ס'ב'ר א'ח'ז א'ת'ק 5, ס'ב'ר'ס א'פ'ר'ס ש'ן'י ה'ב'ת'ג'ו'ת')

ב. ידוע שאסף, אחד מהילדים, חזר עם שק השינה שלו. מה הסיכוי שכל החמישה יחזרו עם שק שינה נכון?

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

(נ'א'ת'ר'ו 4, ס'ב'ר'ס א'פ'ר'ס א'ת'ר').

ג. מהי תוחלת מספר הילדים שחוזרים הביתה עם שק שינה נכון?

$$\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

אזל' כל אחז קוצץ הפכו' הוא  
 תואלת מסמ האונצ'קטור'ם שוף אסכ'ם התואלת  
 ואכן שוף א'  $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

ד. ידוע שאסוף חזר עם שק השינה שלו. מהי תוחלת מספר הילדים שחוזרים הביתה עם שק שינה נכון?

המשתנה האונצ'קטור'י של אסוף מקדם קדם מקד'ה  
 את העיק 1, כל אחז מאכ'ת האונצ'קטור'ם  
 האחר'ם מקדם את העיק 1 קס'  $\frac{1}{4}$ ,  
 אכן תואלת הפסכ'ם היא  $1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2$

ה. ידוע שאסוף חזר עם שק שינה שאיננו שלו. מהי תוחלת מספר הילדים שחוזרים הביתה עם שק שינה נכון?

אסוף קנה מקרה, לא מקרה, את שלו. גם הידור את  
 שלו אסוף, מקרה, לא מקרה, את שלו.  
 כל אחז משעות האחרים את שלו מסל'  
 $\frac{1}{4}$ , אם תמאט מכאם האונקטוריא היא  $\frac{3}{4}$ .

ו. יהי X מספר הילדים שחוזרים הביתה עם שק השינה שלהם, ויהי Y מספר הילדים שחוזרים הביתה עם שק שינה שאיננו שלהם. מהו מקדם המתאם בין X ו-Y?

$$\rho(X, Y) = \rho(X, 5-X) \stackrel{*}{=} -1$$

\* קשר אינטימי יורד

שאלה 2 (18 נקודות - כל סעיף 6 נקודות)

התפלגות מנת המשכל באוכלוסייה היא נורמלית עם תוחלת 100 וסטיית תקן 10.

א. מה הסיכוי שהמוצע המדגמי של 100 אנשים שנבחרו באקראי יהיה גדול מ-101?

$$E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i / 100\right) = 100 \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i / 100\right) = \frac{100 \cdot 10^2}{100^2} = 1$$

ע"פ הקירוב הנורמלי הנשקף הוא:

$$1 - \Phi\left(\frac{101 - 100}{1}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$

ב. חוקר מתעניין באנשים עם רמת משכל של 120 ומעלה. הוא מעוניין לדגום אנשים עד אשר יהיו לו בדיוק 10 אנשים בעלי מנת משכל גבוהה מ-120. מהי תוחלת מספר האנשים שעליו לדגום.

פרט ל-333 הוא קדם מנת משכל הזורה 120 ומ-100:

$$1 - \Phi\left(\frac{120 - 100}{10}\right) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228$$

מספר הנבאים ע"פ שמתקדם פרט מתאים מתבטא  $\Phi(0.0228)$  ותוחלת היא:  $\frac{1}{0.0228} \approx 43.85$  אם תוחלת מספר

הנבאים ע"פ שמתקלים 10 האלה היא 438.5  
 א"כ מספר הנבאים הנחוצות מתבטא  $NB(10, 0.0228)$  ואם תוחלת היא:  $\frac{10}{0.0228}$

ג. במדגם של 400 אנשים, מה הסיכוי שלכל היותר ל-12 תהיה מנת משכל גבוהה מ-120?

תוחלת מספר הנבאים הנבאים היא  $400 \cdot 0.0228 = 9.12$

שאלת מספרם היא  $400 \cdot 0.0228 (1 - 0.0228) \approx 8.91$

ע"פ חוקר ההסתברות המדויקת לשתים הקירוב הנורמלי:

$$\Phi\left(\frac{12.5 - 9.12}{\sqrt{8.91}}\right)$$

בצורה השתמשתי ב-12.5 ולא ב-12? ג"כ, למה? כי קירוב נורמלי עדיף על קירוב בינוני. כי קירוב בינוני הוא יותר אקסטרמלי. כי קירוב בינוני הוא יותר אקסטרמלי. כי קירוב בינוני הוא יותר אקסטרמלי.

שאלה 3 (27 נקודות – סעיפים א, ב – 6 נקודות והשאר 5 נקודות)

- לאחר שמתרחשת רעידת אדמה, מתרחשות רעידות משנה (after-shocks). להלן מספר מאפיינים של רעידות המשנה באזור מסויים של כדור הארץ:
- מספר רעידות המשנה במהלך 48 השעות שלאחר רעידת האדמה הוא תהליך פואסוני עם הקצבים הבאים: במהלך 12 השעות הראשונות יתרחשו בממוצע 20 רעידות משנה; במהלך 12 השעות הבאות יתרחשו בממוצע 10 רעידות; במהלך 24 השעות הבאות יתרחשו בממוצע 5 רעידות.
  - עוצמת רעידות המשנה בלתי תלויה בזמן ההתרחשות ובעוצמה של רעידות אחרות. העוצמה מתפלגת לפי ההתפלגות המעריכית עם תוחלת של 1 בסולם ריכטר.

א. מה הסיכוי שבמהלך 48 שעות יתרחשו בדיוק 40 רעידות משנה?

מספר רעידות המשנה הוא תהליך פואסוני עם קצבים הבאים: במהלך 12 השעות הראשונות יתרחשו בממוצע 20 רעידות משנה; במהלך 12 השעות הבאות יתרחשו בממוצע 10 רעידות; במהלך 24 השעות הבאות יתרחשו בממוצע 5 רעידות.

$$P(X=40) = e^{-35} \cdot \frac{35^{40}}{40!}$$

ב. בשש השעות הראשונות התרחשו 12 רעידות משנה. מה הסיכוי שבדיוק מחציתן התרחשו בשעתיים הראשונות?

ההתפלגות הפואסונית היא מספר רעידות המשנה הוא תהליך פואסוני עם קצבים הבאים: במהלך 12 השעות הראשונות יתרחשו בממוצע 20 רעידות משנה; במהלך 12 השעות הבאות יתרחשו בממוצע 10 רעידות; במהלך 24 השעות הבאות יתרחשו בממוצע 5 רעידות.

$$\binom{12}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^6 \left(1 - \frac{2}{6}\right)^6$$

ג. מה הסיכוי שרעידת המשנה הראשונה תתרחש לכל היותר חצי שעה לאחר רעידת האדמה?

הכאן ק"ן המאוחרות קהתבלות מטאטות מתבלט מעיכ"ת.  
 האן יש אצמן עב הא'רוע הטלסון לבנות של התבלות  

$$P(X \leq \frac{20}{12}) = \int_0^{\frac{20}{12}} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 - e^{-\frac{20}{12}}$$

ד. בחצי בשעה הראשונה לא התרחשה אף רעידת משנה. מה הסיכוי שרעידת המשנה הראשונה תתרחש לפחות שעה לאחר רעידת האדמה?

הנעל שקלע  $[0, 12]$  יש אמתנה המוצב אוב זמן  
 הא'רוע הטלסון לבנות של התבלות מעיכ"ת.  
 אק אפאר אהמתק עם תבנת חמר הצכרון וסקר  
 ישונה שביא המסל"ם של התשונה קמני"ג

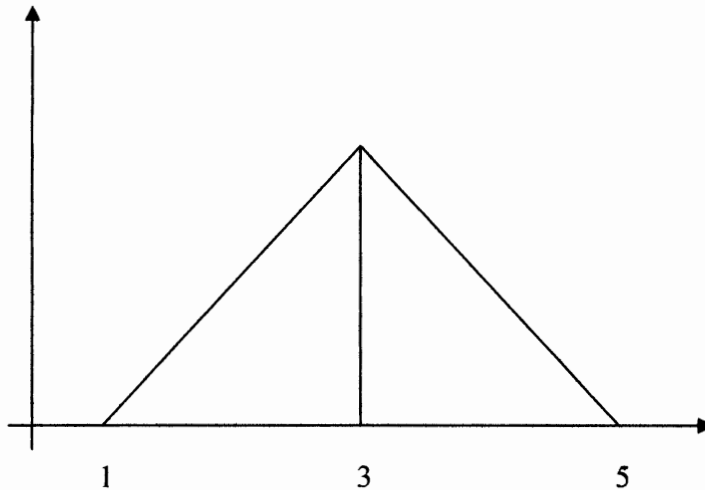
ה. בשש השעות הראשונות התרחשו 12 רעידות משנה. מה הסיכוי שבדיוק מחציתן היו בעוצמה 2 ומעלה?

אזלי על תע"בת אצמה, הכס"ו שהיא תב"ה  
 קע"מה 2 ומעלה הוא  $e^{-2}$ .  
 הכס"ו שצ"וק 6 מת"ק 12 תב"נה האלה הוא  

$$\binom{12}{6} \cdot (e^{-2})^6 \cdot (1 - e^{-2})^6$$

שאלה 4 (27 נקודות – סעיפים א ו- ב – 6 נקודות והשאר 5 נקודות)

במחקר נחקרים מקבלים משימה כלשהי. זמן ביצוע המשימה (בשעות) נמדד. עורכי המחקר הבטיחו 100 ש"ח לכל משתתף עבור שעת הניסוי הראשונה ו- 25 ש"ח לכל שעה נוספת (אם לא משלימים שעה שלמה מקבלים חלק יחסי). למחקר הם דוגמים סטודנטים מכלכלה וסטודנטים ממשפטים. זמני ביצוע הניסוי ב"ת בין נבדקים ומתפלגים לפי הצפיפות:



א. מהו האחוזון ה-87.5 של ההתפלגות?

ז'כ'ק אמצע נקודה שגורה חלק המסלם הצבא  
 שמ'נה פטל  $\frac{12.5}{100} = \frac{1}{8}$  חלק המסלם הקטן  
 (שמ'ן 3) שמ'נה פטל  $\frac{1}{4}$   
 נקודה כטאת פטל אמצע הקטן 3 5 פטל 4



ב. מקב תוחלת ושונות זמן ביצוע המשימה?  
 משקל סטטיסטי (בתוחלת) כפיא 3. את  $E(X^2)$  אפשר  
 לחשב ע"י  $\int f(x) \cdot x^2 dx$  כאשר

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.25(x-1) & 1 \leq x \leq 3 \\ 0.25(5-x) & 3 < x \leq 5 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לא אפשר להן את הדיוק, צריך אחרת: שים עיניכם  
 מה שאתם רואים:  $Z, W \sim U(0,2)$  , קל לראות תלויים.  
 $X = Y + Z + W$  כאשר  $Y$   
 $V(Y+Z+W) = V(Y) + V(Z) + V(W) = 0 + \frac{2^2}{12} + \frac{2^2}{12} = \frac{2}{3}$

ג. אם במדגם 100 נחקרים מהי תוחלת ושונות הסכום שיהיה על עורכי המחקר לשלם לנחקרים?

מסתבר שהצג משנה  $\pm$  שעות מעקר לעצם אחרת. כאשר  
 הוא מקבל את המשנה  $\pm$  שעות מעקר לעצם אחרת  
 אז התשלום הוא  $100 + 25t$ .

$$E(100 + 25t) = 100 + 25 \cdot E(t) = 150$$

$$\text{Var}(100 + 25t) = 25^2 \cdot \text{Var}(t) = 25^2 \cdot \frac{2}{3}$$

תוחלת התשלום  $100$  נחקרים כפיא  $100 \cdot 150$   
 ושונות התשלום  $100$  נחקרים קל לראות תלויים כפיא  
 $100 \cdot \text{Var}(100 + 25t)$

ד. מה הסיכוי שבמדגם של 100 נחקרים, 14 בדיוק יבצעו את המשימה בזמן העולה על 4 שעות?

$$\binom{100}{14} \cdot 0.125^{14} \cdot 0.875^{86}$$

ה. החוקרים שמו לב כי 1/16 (אחד חלקי 16) מהסטודנטים לכללה מסיימים את המשימה ביותר מ-4 שעות, בעוד ש-1/6 (שישית) מהסטודנטים למשפטים מסיימים את המשימה ביותר מ-4 שעות. ידוע שנבדק מסוים סיים את המשימה ביותר מ-4 שעות. מה הסיכוי שזהו סטודנט למשפטים?

תחילה נתק את פרובאביליטי הסטודנטים למשפטים:

$$(1-p) \cdot \frac{1}{16} + p \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8} \implies p = 0.6$$

( $\frac{1}{8}$  של הסטודנטים צמקים יותר מ-4 שעות,  $\frac{1}{8}$  זאת היא סקאל

של ההסתברויות של תלמידי שני החוגים)

אכפיו נתק את ההסתברות המתערה:

$$\frac{0.6 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{8}} = 0.8$$

שלומי