פתרון הבחינה של פרופ' לרר לתלמידי מדעי מחשב דו-חוגי מ 4.2.04

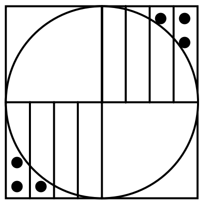
הערה: זאת היתה בחינה אמריקאית. כאן שיניתי את צורתה.

שאלה:

X ו- Y בלתי תלויים ומפולגים אחיד בקטע $[-3,3]$. חשבו $P(X^2+Y^2>9 \mid XY>0)$.

פתרון:

המשתנה הדו מימדי (X,Y) מתפלג אחיד ברבוע. בהינתן ש $XY>0$ אז נבחרה נקודה באחד משני רבועים חלקיים. חלוק סכום שני שטחים שמחוץ לשתי גזרות בסכום שטחי שני הרבועים החלקיים שבהם השטחים נמצאים נותן את ההסתברות המותנה: $1-\pi/4$.



שאלה:

הצפיפות המשותפת של X ו Y נתונה על-ידי: $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{c}{\sqrt{x}}$ עבור $0<y<x<1$

ו $f_{X,Y}(x,y)=0$ אחרת. חשבו $P(2Y<X)$.

פתרון:

בהינתן $(X=x)$, הצפיפות המשותפת לא תלויה ב Y , לכן בהינתן $(X=x)$, Y מתפלג אחיד בקטע $[0,x]$, לכן בהינתן $(X=x)$, $P(2Y<X)=0.5$. כך לגבי כל x אפשרי. לכן ההסתברות היא 0.5 .

שאלה:

ראובן עזב את משרדו בזמן מקרי בין 5:00 ל- 6:00 . אם הוא עוזב t דקות אחרי 5:00 , משך הנסיעה לביתו הוא מקרי והוא מתפלג אחיד בין 20 ל- $20+\dfrac{2t}{3}$. יהי $Y=$ מספר הדקות אחרי 5:00 שראובן עזב את משרדו ו- $X=$ משך הזמן בדקות שלקח לו להגיע לביתו. $E(X)$ הוא

פתרון:

בהינתן שהוא עזב בזמן t תוחלת הזמן המותנה היא $\dfrac{20+20+\frac{2t}{3}}{2}=20+\dfrac{t}{3}$. התוחלת השלמה שווה לתוחלת של התוחלת המותנה והיא $20+E\left(\dfrac{t}{3}\right)=30$

שלומי

<u>שאלה</u>:
כללי יצירת זוגות לריקוד במועדון הם אלה: כל בת מגישה הצעה לבן אקראי. הבנים בוחרים באקראי מבין ההצעות שקיבלו. (אם בן לא קיבל הצעה, הוא לא רוקד).
זוג נוצר כאשר בן מסכים להצעה של בת. (אם בת לא קיבלה הסכמה מהבן אותו היא בחרה, היא לא רוקדת).
יש 40 בנים ו- 30 בנות. מצאו את תוחלת מספר הזוגות שירקדו.

<u>פתרון</u>:

בן מסוים רוקד בסכוי $1-\left(\frac{39}{40}\right)^{30}$. זאת היא תוחלת האינדיקטור של בן מסוים. תוחלת מספר הבנים

שירקדו שווה לתוחלת סכום האינדיקטורים: $40\left(1-\left(\frac{39}{40}\right)^{30}\right)$.

<u>שאלה</u>:
מטילים שתי קוביות ורושמים את הסכום W . כך חוזרים ומטילים את שתי הקוביות ומפסיקים בפעם השלישית שיצא $W=7$. תוחלת מספר הפעמים שמטילים היא:

<u>פתרון</u>:

בכל זוג הטלות ההסתברות לסכום ששווה ל 7 היא $\frac{6}{36}$. לכן מדובר כאן בהתפלגות $NB\left(3,\frac{6}{36}\right)$

שתוחלתה היא 18.

<u>שאלה</u>:
נתון משתנה מקרי שצפיפותו $f(x)$ היא:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 0.5 & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$$

נגדיר Y באופן הבא. אם X קטן מ 1.5 אזי $Y=4$ ואם X גדול או שווה מ 1.5 אזי $Y=0$.
חשבו $E(Y)$.

<u>פתרון</u>:

$$E(Y)=P(Y\ge 1.5)\cdot 0+P(Y<1.5)\cdot 4=(1-P(Y\ge 1.5))\cdot 4=4\cdot\left(1-\int_{1.5}^{2}0.5dx\right)=3$$

<u>שאלה</u>:
משתנה מקרי X מקבל שני ערכים בהסתברות חיובית. ידוע כי $E(X)=3$, $P(X=-3)>0$ ו $V(X)=18$. הערך השני ש-X מקבל בהסתברות חיובית הוא:

<u>פתרון</u>:
יהי a הערך האחר שמתקבל בהסתברות חיובית שהיא p . צריך להתקיים: $3(1-p)+ap=3$
ובנוסף $(1-p)3^2+pa^2-3^2=18$. בפתרון של המערכת מתקיים $a=6$.

שאלה:

מערכת שבה שלושה רכיבים פועלת רק אם שלושת הרכיבים תקינים. אורך חיי הרכיב ה- i מפולג מעריכית עם ממוצע θ_i . מצאו את ההסתברות שהמערכת תפעל לפחות עד זמן t.

(הניחו כי הרכיבים השונים בלתי תלויים זה בזה).

פתרון:

משתנה מעריכי בעל תוחלת θ_i הוא בעל פרמטר $\frac{1}{\theta_i}$. ההסתברות שמשתנה כזה יקבל ערך ששווה לפחות ל t היא $e^{-\frac{1}{\theta_i}t}$. מכיון שאורכי החיים של הרכיבים השונים הם בלתי תלויים אז ההסתברות המבוקשת שווה למכפלת ההסתברויות שהיא: $e^{-\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}\right)t}$.

שאלה:

מטילים מטבע שבו מתקבל "ראש" בהסתברות $\frac{1}{4}$, $1{,}000{,}000$ פעמים. נסמן ב- S את מספר ה"ראשים". אי שיוויון צ'בישב יאמר כי:

פתרון:

תוחלת מספר הראשים היא $250{,}000$. שונות המספר היא $1{,}000{,}000 \cdot 0.25 \cdot 0.75$. על-פי אי-שיוויון צ'בישב אפשר לקבל חסם: $P(|S-250{,}00| \le 1{,}000) \ge 1-\frac{V(S)}{1000^2}=\frac{3}{16}$.

שאלה:

נתון כי X ו Y הם ב"ת ומתפלגים פואסון: $Y \sim Poi(5)$, $X \sim Poi(3)$ הפונקציה יוצרת המומנטים של $X+Y$ היא:

פתרון:

סכום של פואסונים בלתי תלויים מתפלג פואסונית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים. לכן כאן מבוקשת הפונקציה יוצרת מומנטים של משתנה $Poi(8)$ שהיא $e^{8(e^t-1)}$.

שאלה:

בקבוק קולה מחזיק בין 3 ל – 4 ימים (אחיד בקטע) מרגע פתיחתו. נודע לך על מחסור צפוי בקולה ולכן בתור מכור לקולה) החלטת לקנות $1{,}000$ בקבוקים. הערך את ההסתברות ש- $1{,}000$ בקבוקים יחזיקו לפחות $3{,}650$ ימים. (עגלו לספרה השניה אחרי הנקודה העשרונית).

פתרון:

$1{,}000$ בקבוקים יחזיקו בממוצע $3{,}500$ ימים. שונות הזמן שיחזיק בקבוק בודד היא: $\frac{(4-3)^2}{12}$.

שונות הזמן שיחזיקו $1{,}000$ בקבוקים שווה בגלל אי התלות לסכום השונויות: $\frac{1{,}000}{12}$. לפי קירוב נורמלי הפתרון הוא: $1-\phi\left(\frac{3{,}650-3{,}500}{\sqrt{1{,}000/12}}\right) \approx 0$.

<u>שאלה</u>:

יש 100 כדורים: 5 אדומים ו- 95 שחורים. דוגמים בזה אחר זה וללא החזרה עד אשר כל חמשת הכדורים האדומים נדגמו. יהי X = מספר הכדורים שנדגמו. $P(X=6)$ הוא:

<u>פתרון</u>:

האחרון חיב להיות אדום לכן,
$$P(X=6)=\frac{\binom{5}{4}\binom{95}{1}}{\binom{100}{5}}\cdot\frac{1}{1+94}=\frac{5}{\binom{100}{5}}$$

<u>שאלה</u>:

X מפולג פואסון עם פרמטר 8. אזי $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ שווה ל-

---

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\cdot\frac{e^{-8}8^k}{k!}=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-8}8^{1+k}}{(1+k)!}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-8}8^k}{k!}=\frac{1}{8}(1-P(X=0))=\frac{1-e^{-8}}{8}$$

<u>שאלה</u>:

X מ"מ בדיד המקבל בהסתברות חיובית את הערכים $0,1,2,...$. $P(X=k)=\frac{1-e^{-1}}{e^k}$.

הפונקציה יוצרת המומנטים של X היא (כאשר t מספיק קרוב ל- 0):

<u>פתרון</u>:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-1}}{e^k}\cdot e^{kt}=(1-e^{-1})\sum_{k=0}^{\infty}e^{k(t-1)}=(1-e^{-1})\frac{1}{1-e^{t-1}}$$

<u>שאלה</u>:

נתון כי $X\sim N(1,4^2)$ ו- $Y\sim N(2,3^2)$. X ו- Y בלתי תלויים. חשבו $P(X+Y>6)$.

<u>פתרון</u>:

סכום של שני משתנים נורמלים בלתי תלויים מתפלג נורמלי.

$$P(X+Y>6)=1-\phi\left(\frac{6-(1+2)}{\sqrt{4^2+3^2}}\right)=1-\phi(0.6)$$

שלומי