

פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר רון פלד מ 31/07/14

חלק א

סעיף א

בכל שלב הסיכוי להחלפה הוא $a = pq$. צריך שבשתי הפעמים הראשונות לא תהיה אף החלפה או שתהיינה שתי החלפות. ההסתברות לכך היא $(1-a)^2 + a^2$.

סעיף ב

יש אי תלות כאשר $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$.
אבל נבדוק מתי יש אי תלות בדרך אחרת: יש אי תלות אם מתקיים $P(A_3 | A_2) = P(A_3)$.
מתקיים $P(A_3 | A_2) = 1 - a$ ו $P(A_3) = (1-a)^3 + 3(1-a)a^2$. לכן צריך להתקיים
 $1 - a = (1-a)^3 + 3(1-a)a^2$. זה מתקיים כאשר $a = 0$ או $a = 1$ או $a = 0.5$.
זאת אומרת שאם שלפחות אחד מבין p ו q הוא 0 או ששניהם שווים ל 1 או שמכפלתם היא חצי.

דרך אחרת

במקרה שלפחות לאחד מבין A_2 או A_3 יש הסתברות 0 או 1 אז יש אי תלות. זה קורה אם $a = 0$ או $a = 1$. אם $0 < P(A_2), P(A_3) < 1$, אז כדי שתהיה אי תלות, צריך להתקיים $P(A_3 | A_2) = P(A_3 | A_2^c)$. לאגף שמאל יש הסתברות $1 - a$ ולאגף ימין יש הסתברות a . לכן נדרש ש $a = 1 - a$ או $a = 0.5$.

סעיף ג

לגבי כל שלב, כל האינפורמציה נמצאת במצב הקודם. התהליך מתואר על-ידי מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

אם מתקיים $a = 0$ אז תמיד נשארים במצב הראשון. לעולם לא תהיה החלפה ומתקיים עבור כל n , $P(A_n) = 1$. אם $a = 1$, אז בכל שלב תהיה החלפה. בשלבים הזוגיים, תמיד ליובב יהיה מטבע אדום ובשלבים האי זוגיים, תמיד ליובב יהיה מטבע כחול. לכן אין במקרה זה הסתברות גבולית.

אם $0 < a < 1$ אז השרשרת היא בלתי פריקה (יש מעבר מכל אחד משני המצבים למצב האחר). לכן לשרשרת יש וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד. מתקבל שוקטור ההסתברויות הסטציונרית הוא $(0.5, 0.5)$. אפשר לקבל את זה מפתרון מערכת משוואות או, למי שמכיר, בעזרת תוצאה כללית יותר שאומרת שבמטריצת מעבר דו סטוכסטית (שבה גם סכום כל עמודה הוא 1), יש וקטור סטציונרי שכל רכיביו שווים. ניתן לחזור לכל מצב מעצמו בצעד אחד. זהו תנאי מספיק לכך שהשרשרת לא מחזורית. בשרשרת בלתי פריקה ולא מחזורית, ההסתברויות הגבוליות שוות לסטציונריות. לכן ההסתברות הגבולית המבוקשת היא 0.5.

חלק ב

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
א	ד	א	ד	ג	ג	ד	ב	ג	ב	ב	א

הסברים קצרים

שאלה 1

מתקיים $E(T) = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20$, $E(N) = 120 \cdot 0.5 = 60$.

שאלה 2

יש 120 נסיונות דו שלביים. כל ניסוי כזה הוא הצלחה בסיכוי $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$. לכן, ההתפלגות היא

$$. Bin\left(120, \frac{1}{6}\right)$$

שאלה 3

לגבי כל אחד אחד מ 120 הנסיונות הוא יכול להסתיים באחת משלוש אפשרויות: או שהוא יקטע כבר לאחר השלב הראשון, או שהוא יסתיים בתוצאה T , או שהוא יסתיים בתוצאה S . הנסיונות שיכולים להסתיים ב S , הם הנסיונות שלא הסתיימו ב T . כל נסיון שלא הסתיים ב

$$. T, \text{ יסתיים ב } S \text{ בסיכוי } \frac{0.5 \cdot \frac{2}{3}}{0.5 + 0.5 \cdot \frac{2}{3}}$$

שאלה 4

ככל שיש יותר תוצאות T , כן קטנה התוחלת המותנה של מספר תוצאות ה S . לכן המתאם הוא שלילי. ננסה להמחיש את העובדה שאם התוחלת המותנה של אחד יורדת כפונקציה של האחר, אז יש מתאם שלילי: המתאם לא משתנה כאשר מבצעים הזזה לינארית של המשתנים. אם נבצע הזזות כך שלכל אחד מהמשתנים תהיה תוחלת של אפס, אז סימנו של המתאם יהיה כסימנה של תוחלת מכפלת המשתנים. אם התוחלת המותנה של משתנה היא מונוטונית יורדת כפונקציה של האחר, אז תוחלת המכפלה היא שלילית. אבל, אין קשר לינארי יורד, ולכן המתאם אינו מינוס 1. למשל, אם $T = 0$, אז S יכול לקבל ערכים שונים ולכן בודאי שאין קשר לינארי מוחלט.

שאלה 5

זהו משתנה פואסוני מפוצל.

שאלה 6

לא בינומי שלילי, למשל כי בינומי שלילי לא יכול לקבל את הערך 0 וכאן כן יכול להתקבל הערך 0.
לא בינומי, למשל כי בינומי יכול לקבל רק ערכים מתוך קבוצה סופית וזה לא המצב כאן.
לא פואסוני, למשל כי התפלגות פואסונית אינה חסרת זכרון.

שאלה 7

קעת מדובר בסדרת נסיונות בלתי תלויים ושווי התפלגות.

שאלה 8

כל אחד מהמשתנים הוא פיצול של משתנה $P(100)$. ערכי פיצול של משתנה פואסוני הם תמיד בלתי תלויים. לכן, יש למשתנה את ההתפלגות המקורית שלו שהיא $P(50)$.

שאלה 9

הקומבינציה יכולה לקבל את הערך 0 ולכן היא לא מתפלגת בינומית שלילית.
הקומבינציה יכולה לקבל כל ערך טבעי ולכן היא לא מתפלגת בינומית.
עם כל אחד מאלון ובן הולכים בממוצע 51.5 ילדים (הוא עצמו בודאות, בסיכוי חצי גם האחר וגם קבוצה שגודלה מתפלג $P(50)$). לכן לקומבינציה יש תוחלת של 101.
אילו היא היתה בעלת התפלגות פואסונית, אז היא היתה מתפלגת $P(101)$. נוכל למשל לראות שהערך 0 לא מתקבל כאן באותה הסתברות כמו במקרה של התפלגות $P(101)$.

שאלה 10

מספר הנמצאים בקבוצה של אלון מתפלג כסכום של שלושה משתנים בלתי תלויים. לראשון יש התפלגות $P(50)$, השני הוא אינדיקטור בעל הסתברות חצי שמייצג את שייכותו של בן לקבוצה והשלישי הוא משתנה מנוון שמקבל רק את הערך 1 ומציין את שייכותו של אלון לקבוצה. שונות הסכום היא $0 + 0.5 \cdot 0.5 + 0.5$.

שאלה 11

נוסף נתון שלמשתנה יש תוחלת סופית.
א' וג' לא מתקיימים: נניח למשל שהמשתנה מקבל רק ערך של 2 ולמאורע יש הסתברות שקטנה מ 1. במקרה זה, התוחלת המותנה גדולה מתוחלת המכפלה.
לגבי ב', יתכן שיש שיוויון גם ללא התנאי. נניח שהמשתנה מקבל רק את הערך 0. במקרה זה שתי התוחלות שוות לאפס.

הערה

$$E(X | A) = E(X \cdot 1_A) / P(A)$$

שאלה 12

אם מתקיים בהסתברות חיובית $(X \neq Y)$, אז יש הסתברות חיובית שהמינימום והמקסימום יקבלו ערכים שונים. מכיון שהמקסימום אף פעם לא קטן מהמינימום, אז יתכן רק שהמינימום קטן יותר. לכן במקרה זה, אין להם למשל את אותה תוחלת ובודאי שלא את אותה התפלגות.

גם אם ל X ול Y אותה התפלגות, אפשרי ש $P(X = Y) < 1$.
יתכן ש $P(X = Y) = 1$ גם אם המשתנים אינם קבועים.

שלומי