

סמסטר ב', מועד ב', תשע"ד, 31.7.2014

בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רון פלד)

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות ברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת S נקודות, ציוןך $\min(S, 100)$.

בהצלחה!!!

חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

- לשמשון מטבע כחול וליובב מטבע אדום. למטבע הכחול הסתברות p לנחות על עץ ולמטבע האדום הסתברות q לנחות על עץ.
- שמשון ויובב משחקים ביניהם את המשחק הבא: בכל תור מטיל כל אחד מהם את המטבע שבידו באופן בלתי תלוי. אם בשני המטבעות התקבל עץ, שמשון ויובב מתחלפים ביניהם במטבעות. אחרת, כל אחד נשאר עם המטבע שבידו כעת.
- יהי A_n המאורע שבתום n תורות מחזיק יובב את המטבע האדום.
- (א) (6 נקודות) חשבו את $P(A_2)$.
- (ב) (8 נקודות) לאילו ערכי $p, q \in [0, 1]$ המאורעות A_2 ו- A_3 בלתי תלויים? הוכיחו את טענותיכם.
- (ג) (12 נקודות) קבעו לאילו ערכי p, q קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$. כאשר הגבול קיים, חשבו אותו. יש להתייחס לכל ערכי $p, q \in [0, 1]$ ולהוכיח את טענותיכם.

חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

סוגיה ראשונה

- לקרנית שני מטבעות. מטבע של דולר בעל הסתברויות שוות ליפול על עץ או על פלי כאשר מטילים אותו ומטבע של שקל בעל הסתברות $1/3$ ליפול על עץ והסתברות $2/3$ ליפול על פלי כאשר מטילים אותו.
- קרנית מטילה את מטבע הדולר 120 פעמים באופן בלתי תלוי ומסמנת ב- N את כמות תוצאות העץ שהתקבלו בהטלות אלה.
- לאחר מכן מטילה קרנית את מטבע השקל N פעמים באופן בלתי תלוי ומסמנת ב- T את כמות תוצאות העץ שהתקבלו וב- S את כמות תוצאות הפלי שהתקבלו בהטלות אלה.

- (1) התוחלת של T היא
- (א) 20
 - (ב) 40
 - (ג) 60
 - (ד) אף אחת מהנ"ל

- (2) ההתפלגות של T היא
- (א) אחידה
 - (ב) בינומית
 - (ג) היפרגיאומטרית
 - (ד) אף אחת מהנ"ל

- (3) ההתפלגות של S בהנתן ש- $T=30$ היא
- (א) אחידה
 - (ב) בינומית
 - (ג) היפרגיאומטרית
 - (ד) אף אחת מהנ"ל

- (4) מקדם המתאם בין T ל- S הוא
- (א) קטן מ-1 אך גדול מ-0
 - (ב) 0
 - (ג) קטן מ-0 אך גדול מ-(-1)
 - (ד) אף אחת מהנ"ל

סוגיה שניה

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם תוחלת 100. בגן שושנה ישנם X ילדים. ביום מסויים הוחלט לחלק את הילדים לשתי קבוצות – קבוצת "עץ" וקבוצת "פלי". לצורך כך הטילה שושנה מטבע הוגן עבור כל ילד, באופן בלתי תלוי, כדי לקבוע את שיוכו. נסמן ב- $Z_{\text{פלי}}, Z_{\text{עץ}}$ את מספר הילדים בקבוצת "עץ" ובקבוצת "פלי" בהתאמה.

(5) ההתפלגות של $Z_{\text{עץ}}$ היא

- (א) בינומית שלילית
- (ב) פואסונית
- (ג) בינומית
- (ד) אף אחת מהנ"ל

(6) בהתניה על $Z_{\text{עץ}} \geq 1$, ההתפלגות המותנית של $Z_{\text{עץ}} - 1$ היא

- (א) בינומית שלילית
- (ב) פואסונית
- (ג) בינומית
- (ד) אף אחת מהנ"ל

(7) בהתניה על X , ההתפלגות המותנית של $Z_{\text{עץ}}$ היא

- (א) בינומית שלילית
- (ב) פואסונית
- (ג) בינומית
- (ד) אף אחת מהנ"ל

(8) מהי $E(Z_{\text{עץ}} | Z_{\text{פלי}} \geq 10)$?

- (א) 40
- (ב) 45
- (ג) 50
- (ד) אף אחת מהנ"ל

לאחר פתיחת הלימודים, הצטרפו לגן הילדים אלון ובן. שושנה הטילה את המטבע ההוגן עבור כל אחד מהם, באופן בלתי תלוי, בכדי לקבוע את שיוכם לקבוצת "עץ" ו-"פלי". לאחר שיוך זה, נסמן ב- $Y_{\text{אלון}}, Y_{\text{בן}}$ את מספר הילדים בקבוצות של בן ואלון (כולל בן ואלון) בהתאמה.

(9) התפלגות $Y_{\text{אלון}} + Y_{\text{בן}} - 2$ היא

- (א) בינומית שלילית
- (ב) פואסונית
- (ג) בינומית
- (ד) אף אחת מהנ"ל

(10) השונות של $Y_{\text{אלון}}$ היא

- (א) 50.25
- (ב) 50
- (ג) 25.25
- (ד) אף אחת מהנ"ל

שאלות שאינן חלק מסוגיה

11) נתון משתנה מקרי X ומאורע A המקיים $P(A) > 0$. נגדיר את המשתנה המקרי 1_A להיות האינדיקטור של המאורע A . כלומר, $1_A = 1$ אם A התרחש ואחרת $1_A = 0$.

האם $E(X | A) = E(X1_A)$?

- (א) כן, ללא תנאים נוספים
- (ב) כן אם ורק אם $P(A) = 1$
- (ג) כן אם ורק אם X קבוע
- (ד) אף אחת מהנ"ל

12) נתונים שני משתנים מקריים X, Y המקיימים

$$P(X \in \{-1, 1\}) = 1 \text{ ו- } P(Y \in \{-1, 1\}) = 1$$

נסמן ב- $\min(X, Y)$ את המשתנה המקרי המקבל (בכל נקודת מדגם) את המינימום מבין ערכי X ו- Y . באופן דומה, נסמן ב- $\max(X, Y)$ את המשתנה המקרי המקבל (בכל נקודת מדגם) את המקסימום מבין ערכי X ו- Y .

המשתנים $\min(X, Y)$ ו- $\max(X, Y)$ הם בעלי אותה התפלגות

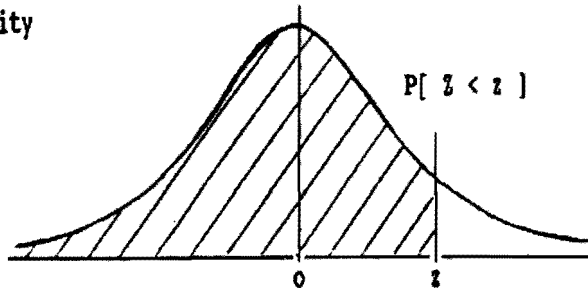
- (א) אם ורק אם $P(X=Y)=1$
- (ב) אם ורק אם X ו- Y בעלי אותה התפלגות
- (ג) אם ורק אם קיים a כך ש- $P(X=a)=P(Y=a)=1$
- (ד) אף אחת מהנ"ל

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[Z < z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000