

מספר מחברת: _____

מספר ת.ז.: _____

בחינה בקורס מבוא להסתברות שנת תשסו, סמסטר ב', מועד ב' מרצה: אילון סולן

תאריך הבחינה: 29.9.2006
מספר הקורס: 1102 – 0365

זמן הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי, ומחשב כיס.
השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה. סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X		X
		X				X	X
			X		X		X
				X		X	X
.0	-2	6	-2	-2	-4	4	0

דוגמא:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.
לשימושך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!!

	1	2	3	4	5	6
א						
ב						
ג						
ד						

	7	8	9	10	11	12
א						
ב						
ג						
ד						

	13	14	15	16	17	18	19
א							
ב							
ג							
ד							

סוגיה ראשונה

ליעקב שתי נשים - לאה ורחל, ושתי פלגשים - בלהה וזלפה. ליעקב 12 בנים - ששה מלאה, שניים מרחל, שניים מבלהה ושניים מזלפה. יעקב נותן לחמישה מבניו כתונת פסים. חמשת הילדים נבחרים בצורה אקראית מבין כל בניו. נמספר את בניו של יעקב מ-1 ועד 12. בניה של לאה הם $1, 2, \dots, 6$. נגדיר את המשתנים המקריים הבאים:
 $X_i = 1$ אם הילד ה- i קיבל כתונת, ו- $X_i = 0$ אחרת.
 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_6$ מציין את מספר בניה של לאה שקיבלו כתונת.
 $Z =$ מספר בניה של בלהה שקיבלו כתונת.

1. המשתנים המקריים X_1 ו- X_2 הם:

(א) בלתי תלויים ושוי התפלגות.

(ב) תלויים ושוי התפלגות.

(ג) בלתי מתואמים אך תלויים.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

2. התוחלת $E[X_{12}Y]$ שווה ל:

(א) $\frac{5}{12} \cdot 6 \cdot \frac{5}{12}$

(ב) $7 \cdot \frac{5}{12}$

(ג) $\frac{5}{12} \cdot 6 \cdot \frac{4}{11}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

3. התוחלת המותנה $E[Z | X_1 + X_2 + X_3 = 3]$ שווה ל:

(א) $2 \cdot \frac{2}{9}$

(ב) $2 \cdot \frac{3}{9}$

(ג) $2 \cdot \frac{2}{12}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

4. השונות המותנה $\text{Var}[Z | X_1 + X_2 + X_3 = 3]$ שווה ל:

א) $\frac{.882}{.81 \cdot 36} \approx 0.3025$

ב) $\frac{1}{2}$

ג) $\frac{.645 - .485}{72^3} \approx 0.8381$

ד) אף תשובה אינה נכונה.

5. עבור אילו ערכים של y מתקיים $\text{Var}(Z | Y = y) = 0$:

א) $y = 0, 5$

ב) $y = 1, 2, 3, 4, 5$

ג) לכל ערך של y השונות המותנה של Z אינה 0.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

6. ליעקב יש 1200 בנים, מהם 600 הם בניה של לאה. 500 מהילדים מקבלים כתונת פסים (500 בני המזל נבחרים בצורה אקראית מבין כל הבנים). ניתן להעריך את ההסתברות שלפחות 200 מבניה של לאה יקבלו כתונת פסים בעזרת:

א) אי-שוויון מרקוב.

ב) משפט הגבול המרכזי.

ג) אי-שוויון קולמוגורוב.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגיה שנייה

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים ושוי התפלגות: $X, Y \sim U(1, 2, \dots, n)$.
לכל $i = 1, 2, \dots, n$ נגדיר את המאורע הבא:

$$A_i = \{X < i < Y\} \cup \{Y < i < X\}.$$

אם מתרחש המאורע A_i נאמר כי " i היא נקודת הפרדה בין X ל- Y ".

7. ההסתברות $P(A_i)$ שווה ל:

(א) $\frac{1}{n-1}$

(ב) $\frac{2(i-1)(n-i)}{n^2}$

(ג) $\frac{i(n-i+1)}{n^2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

8. ההסתברות $P(\cup_{i=2}^{n-1} A_i)$ שווה ל:

(א) $\frac{n-1}{n}$

(ב) $\frac{3n-2}{n^2}$

(ג) $\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

9. עבור שלושה מספרים i, j, k המקיימים $1 < i < j < k < n$, ההסתברות המותנה $P(A_j | A_i \cap A_k)$ שווה ל:

(א) $\frac{(j-i)(k-j)}{n^2}$

(ב) $\frac{(j-i-1)(k-j-i)}{(k-i)^2}$

(ג) $\frac{2(j-i-1)(k-j)}{(k-i)^2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

10. יהא Z מספר נקודות ההפרדה בין X ל- Y . כלומר, Z הוא מספר המאורעות המתרחשים מבין A_2, A_3, \dots, A_{n-1} . התוחלת $E[Z]$ שווה ל:

א $\frac{n}{2}$.

ב $\frac{n-1}{2}$.

ג $\frac{(n-1)(n-2)}{3n}$.

ד אף תשובה אינה נכונה.

11. נגדיר $W = |X - Y|$. ההסתברות המותנה $P(W = 0 | Z = 0)$ שווה ל:

א $\frac{n}{3n-2}$.

ב $\frac{1}{2}$.

ג 1.

ד אף תשובה אינה נכונה.

12. מקדם המתאם $\rho(W, Z)$ מקיים:

א $\rho(W, Z) = 0$.

ב $0 < \rho(W, Z) < 1$.

ג $\rho(W, Z) = 1$.

ד אף תשובה אינה נכונה.

סוגיה שלישית

אברהם, שרה, יצחק, רבקה, יעקב ורחל אוהבים לשחק שחמט. הם החליטו כי יפגשו יום יום, יתחלקו לזוגות, וכל זוג ישחק משחק אחד. כיצד יתחלקו לזוגות? החברים החליטו על השיטה הבאה:

תחילה שרה תבחר את אחד משלושת הגברים, אחריה רבקה תבחר את אחד משני הגברים שנותרו, ולבסוף רחל תיקח את הגבר שעוד לא נבחר.

שרה אוהבת גיוון, ולכן היא בוחרת את בן זוגה למשחק באופן מקרי ולא תלוי בבחירה ותיה הקודמות. רבקה, לעומתה, אוהבת לשחק עם יצחק, ולכן אם יצחק לא נבחר על ידי שרה היא בוחרת בו. אם יצחק נבחר על ידי שרה היא בוחרת את אברהם או יעקב בהסתברויות שוות ובאופן בלתי תלוי בבחירותיה הקודמות.

13. ההסתברות שרבקה משחקת עם יעקב ביום הראשון שווה ל:

(א) 0.

(ב) $\frac{1}{6}$.

(ג) $\frac{1}{3}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

14. נסמן ב- S_n את מספר הפעמים שרבקה שיחקה עם יצחק במהלך n הימים הראשונים. ההתפלגות של S_n היא:

(א) $S_n \sim B(n, \frac{1}{3})$

(ב) $S_n \sim B(n, \frac{2}{3})$

(ג) $S_n \sim U(0, 1, \dots, n)$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

15. נסמן ב- W_n את מספר הימים בהם שרה שיחקה עם אברהם ורבקה שיחקה עם יצחק, במהלך n הימים הראשונים. ההתפלגות של W_n היא:

(א) $W_n \sim B(n, \frac{1}{3})$

(ב) $W_n \sim B(n, \frac{2}{3})$

(ג) $W_n \sim U(0, 1, \dots, n)$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

16. ההסתברות שלאחר 1000 ימים רבקה שיחקה עם יצחק בין 600 ל-680 פעמים, היא, בקירוב (על פי הקירוב הנורמלי):

א) 0.

ב) 0.8146.

ג) 1.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

17. נסמן ב- S_n את מספר הפעמים שרבקה שיחקה עם יצחק במהלך n הימים הראשונים. נסמן ב- A_n את המאורע ששרה שיחקה עם אברהם ביום n . התוחלת המותנה של S_{10} בהינתן ש- A_1 לא קרה, $E[S_{10} | A_1^c]$, היא:

א) 6.

ב) $6\frac{2}{3}$.

ג) 7.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

נסמן ב- S_n את מספר הפעמים שרבקה שיחקה עם יצחק במהלך n הימים הראשונים. נסמן ב- T_n את מספר הפעמים ששרה שיחקה עם אברהם במהלך n הימים הראשונים.

18. התוחלת המותנה $E[S_n | T_n = k]$ היא:

א) k .

ב) $n - k$.

ג) $\frac{n+k}{2}$.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

19. התוחלת $E[S_n T_n]$ היא:

א) $\sum_{k=1}^n k \frac{n+k}{2}$.

ב) $\sum_{k=1}^n k(n-k)$.

ג) $\frac{2}{9}n^2$.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוג	$P(X = x)$	$E(X)$	$Var(X)$
$X \sim B(n, p), 0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$	np	$np(1-p)$
$X \sim P(\lambda), \lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ
$X \sim G(p), 0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X \sim U(1, 2, \dots, n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$	

טבלה 1: מספר התפלגויות

רשימת נוסחאות

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

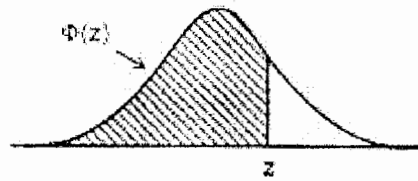
$$E[X] = E[E[X | Y]]$$

$$Var(X) = E[Var(X | Y)] + Var(E[X | Y])$$

נספח 1 טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית - ערכי $\Phi(z)$

נספח 2

משתנים 1



התפלגות וסימנה

בינומית

$B(n, p)$

$(0 \leq p \leq 1)$

גאומטרית

$G(p)$

$(0 < p \leq 1)$

אחידה

$U(1, N)$

היפרגאומטרית

$H(N, D, n)$

בואסונית

$P(\lambda)$

$(\lambda > 0)$

משתנים 2

התפלגות

וסימנה

אחידה

$U(\alpha, \beta)$

מעריכית

$\exp(\lambda)$

$(\lambda > 0)$

נורמלית

$N(\mu, \sigma^2)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6292	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7485	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9915
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995