פתרון הבחינה מ 28.2.03 (עריכה של פרופ' גילת ופרופ' מלכין, מועד ב')

1. $cov(X_1,X_{51})=E(X_1\cdot X_{51})-E(X_1)\cdot E(X_{51})$. אם למשל כל המספרים קטנים בערכם המוחלט מ $\frac{1}{200}$, אז כמובן ש $cov(X_1,X_{51})$ קטן בערכו המוחלט מכל הערכים המוחלטים של המספרים הראשונים? אז, ר', ג', הסעיפים הראשונים נכונים שבהנחת עי' הראשונה

2. $\rho(X_1,X_{51})=\frac{cov(X_1,X_{51})}{\sqrt{V(X_1)\cdot V(X_{51})}}\overset{\text{בהנחת עי'}}{=}\frac{cov(X_1,X_{51})}{V(X_1)}$

אם נגדיר על גימה של $X_1,X_2,\dots,X_{101}$ אז:

$$0=V\left(\sum_{i=1}^{101}X_i\right)=101\cdot V(X_1)+101\cdot 100\cdot cov(X_1,X_{51})$$

$$\Longrightarrow cov(X_1,X_{51})=-\frac{1}{100}\cdot V(X_1)\Longrightarrow \rho(X_1,X_{51})=\frac{-1}{100}$$

3. $V(V)=\frac{\sum V(X_i)}{51^2}=\frac{V(X_1)}{51}$, $V(U)=\frac{\sum V(X_1)+\sum cov(X_i,X_j)}{51^2}=$

$$=\frac{51\cdot V(X_1)+51\cdot 50\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)\cdot V(X_1)}{51^2}=\frac{V(V)}{2}$$

4. $P(X=5)=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{98}{2}}{\binom{101}{4}}\cdot\frac{1}{97}=\frac{1}{101\cdot 25\cdot 11}$

5. X הוא סכום של משתנים גיאומטרים שני ברנולי: $E(X)=\frac{1}{\frac{3}{101}}+\frac{1}{\frac{2}{101}}+\frac{1}{\frac{1}{101}}$

---

6. $\rho(X,Y+Z)=\rho(X,N-X)=-1$ (פשר הקשר הוא לינארי יורד אז המתאם הוא -1).

7. $V(X)=N\cdot V(X_1)+\binom{N}{2}\cdot cov(X_1,X_2)=N\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{N-1}{N}+$
$+2\cdot\binom{N}{2}\cdot\left(\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}\right)=1$

8. $P(X\geq 1)\overset{\text{הכלה והפרדה}}{=}\binom{N}{1}\cdot\frac{1}{N}-\binom{N}{2}\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}+\binom{N}{3}\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}$
$\pm\dots$

וכאשר $N\to\infty$ זה שואף ל $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\dots=1-\frac{1}{e}$

9. אם למשל $Y=n-1$ אז: בהכרח $Z=1$ לפי תנאי, אולם הם שני הדבלטות לפי שיקולי סימטריה.

10. לפי לינקוריאה: $E(Y)=1\cdot 0+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=1$

$V(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{1}{6}\cdot 0^2+\frac{1}{6}\cdot 2^2+\frac{4}{6}\cdot 1^2-1^2=\frac{1}{3}$

11. לגבי כל כדור הסתברות שווה (אם אין מידע על הקודמים)

$$p=E\left(\frac{X}{100}\right)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

12. כל כדור נותן אינדיקציה על מספר הבאדומים בקופסה ולכן כל תוצאה משפיעה על הסתברות בהמשך, אלא אם כן בהתפלגות מונות ואז.

הסכומים יוצאים מהשוויון.

13. $$E\left(\left(\frac{X}{100}\right)^2\right)=\frac{E^2(X)+V(X)}{10{,}000}=\frac{1}{16}+\frac{V(X)}{10{,}000}>\frac{1}{16}$$

14. $$\frac{E(X^2)}{100^2}-\frac{E(X(X-1))}{100\cdot 99}=E(X^2)\cdot\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{100\cdot 99}\right)+\frac{25}{100\cdot 99}$$

$\Longrightarrow$ תלוי ב? $E(X^2)$ שנקבע ע"י ההתפלגות

15. $$\frac{E(X^2)}{100^2}=\frac{V(X)+E^2(X)}{100^2}=\frac{625+625}{100^2}=\frac{1}{8}$$

---

16. התכונות $P(X=k)=p\cdot q^{k-1}$! $P(X>k)=q^k$ מיידות ההתפלגות גאומטרית.

$$P(X=h+k\mid X>h)=\frac{p\cdot q^{h+k-1}}{q^h}=p\cdot q^{k-1}=P(X=k)$$

$\Longrightarrow$ התנאי מתקיים

בכיוון הזה: נניח $P(X=1)=p$.

נניח ש $P(X=t)=p\cdot q^{t-1}$ לכל $t\le h$ ונרצה להוכיח אינדוקציה ש $P(X=h+1)=p\cdot q^h$.

מכך ש $P(X=t)=p\cdot q^{t-1}$ לכל $t\le h$ נקבל ש $P(X>h)=q^h$.

$P(X=h+1)=P(X>h)\cdot P(X=h+1\mid X>h)=q^h\cdot P(X=1)=q^h\cdot p$

17. מכיוון שבהתפלגות של מונות אז $0<p<1$, אפשר למשל לראות שבסכום של יכול לקבל את הערך 1 ולכן הוא לא בעל התכונה.

18. $X\sim G(p_1)$, $Y\sim G(p_2)$; אז תלות

$$P(\min(X,Y)>k)\overset{\text{אז תלות}}{=}P(X>k)\cdot P(Y>k)=q_1^k\cdot q_2^k=$$

$$=(q_1\cdot q_2)^k\Longrightarrow G(1-q_1\cdot q_2)$$ למינימום יש התפלגות

בהצלחה