

בחינה במבוא להסתברות
המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' יצחק מלכסון

- משך הבחינה: שלוש שעות
- מותר להשתמש בסיכום אישי בהיקף של עד 2 דפים ובמחשב כיס
- השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. ענה על כולן
- לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה (במקום המתאים בגוף השאלון ובטבלה שבתחתית עמוד זה) מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.
- הצובר N נקודות יקבל את הציון $\min(100, \max(N, 0))$.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5
א					
ב					
ג					
ד					

	6	7	8	9	10

	11	12	13	14	15
א					
ב					
ג					
ד					

	16	17	18
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה 1

תהי נתונה אוכלוסיה של 101 מספרים, לא כולם שווים. נלקח מדגם מקרי בגודל 51 מאוכלוסיה זו. יהיו X_1, X_2, \dots, X_{51} התצפיות במדגם לפי סדר הופעתן במהלך הדגימה. בהנחה שהדגימה בוצעה בלי החזרה,

1. השונות המשותפת (cov) של X_1 ו- X_{51} היא

א. -100

ב. $-\frac{1}{100}$

ג. $\frac{1}{101}$

ד. תלויה בשונות האוכלוסיה.

2. מקדם המתאם בין X_1 ו- X_{51} הוא

א. $\frac{1}{101}$

ב. $-\frac{1}{100}$

ג. $-\frac{1}{50}$

ה. תלוי בשונות האוכלוסיה.

3. תהי u השונות של ממוצע המדגם, ו- v השונות הזאת לו הדגימה בוצעה עם החזרה.

א. $v = 2u$

ב. $v = u$

ג. $u = 2v$

ד. היחס בין u ו- v תלוי בשונות האוכלוסיה.

בשאלות 4 ו-5, שלושה מ-101 המספרים הם 1, כל היתר אפסים. דוגמים את המספרים בזה אחר זה עד שנדגמו כל שלושת ה-1 ים. יהי X מספר הדגימות.

4. בדגימה בלי החזרה, $P(X = 5)$ היא

א. $\frac{518616}{101^5}$

ב. $\frac{1}{101 \times 25 \times 11}$

ג. $\frac{3}{101} \left(1 - \frac{3}{101}\right)^4$

ד. אף אחת מהנייל.

5. בדגימה עם החזרה, $E(X)$ היא

- א. $\frac{101 \times 11}{6}$
- ב. 101
- ג. $\frac{101}{3}$
- ד. אף אחת מהנייל.

סוגיה II

עומדים בתור N אנשים ($N \geq 2$) ממוספרים מ-1 עד N לפי סדר העמידה בתור. כעת בוחרים להם סידור אקראי מחדש. יהי X מספר האנשים ששמרו על מקומם בתור, Y מספר האנשים שהתקדמו בתור ו- Z מספר האנשים שנסוגו בתור.

6. מקדם המתאם בין X ו- $(Y + Z)$ הוא

- א. 0
- ב. 1
- ג. -1
- ד. אין מספיק נתונים בשביל לקבוע.

7. התוחלת והשונות של X מקיימים

- א. $E(X) = 1, Var(X) = 1$
- ב. $E(X) = 1, Var(X) = \frac{N-1}{N}$
- ג. $E(X) < 1, Var(X) > 1$
- ד. אף אחד מהנייל.

8. כש- N שואף לאינסוף, ההסתברות $P(X \geq 1)$ שואפת ל-

- א. $\frac{1}{2}$
- ב. 1
- ג. $1 - \frac{1}{e}$
- ד. $\frac{1}{e}$

9. Y ו- Z הם:

- א. בלתי תלויים ושווי התפלגות
- ב. בלתי תלויים אך לא שווי התפלגות
- ג. שווי התפלגות אך תלויים
- ד. תלויים ולא שווי התפלגות

10. עבור $N = 3$, התוחלת והשונות של Y מקיימות

א. $E(Y) = 1, \text{Var}(Y) = \frac{1}{2}$

ב. $E(Y) = 1, \text{Var}(Y) = \frac{1}{3}$

ג. $E(Y) = \frac{2}{3}, \text{Var}(Y) = 1$

ד. $E(Y) = \frac{2}{3}, \text{Var}(Y) = \frac{1}{3}$

סוגיה III

בקופסה יש X כדורים אדומים ($0 \leq X \leq 100$) ו- $100 - X$ כדורים שחורים. ערכו של X וההתפלגות של X אינם ידועים, אך ידוע כי $E(X) = 25$. דוגמים שני כדורים עם החזרה מן הקופסה.

11. ההסתברות שהכדור השני אדום היא:

א. $\frac{1}{4}$

ב. $\frac{1}{2}$

ג. $\frac{24}{100}$

ד. לא ניתן לקבוע על פי הנתונים.

12. הצבעים של שני הכדורים הם בלתי תלויים

א. תמיד

ב. לעולם לא

ג. רק כאשר X מנוון (קבוע בהסתברות 1)

ד. התשובה תלויה בהתפלגות הלא מנוונת של X .

13. כאשר X בעל התפלגות לא מנוונת, ההסתברות לכך ששני הכדורים הם אדומים היא

א. $\frac{1}{16}$

ב. גדולה מ- $\frac{1}{16}$

ג. קטנה מ- $\frac{1}{16}$

ד. התשובה תלויה בהתפלגות X .

14. תהי R ההסתברות ששניהם אדומים ותהי Q ההסתברות ששניהם אדומים לו הדגימה בוצעה בלי ההזרה. אז $R - Q$ היא

א. $\frac{1}{400}$

ב. $-\frac{1}{400}$

ג. 0

ד. התשובה תלויה בהתפלגות X .

15. אם בנוסף ל- $E(X)$ כנייל, ידוע ש- $\sigma(X) = 25$, אז R הוא

א. $\frac{1}{16}$

ב. $\frac{1}{8}$

ג. $\frac{1}{32}$

ד. התשובה תלויה בהתפלגות X .

IV סוגיה

נתון משתנה מקרי לא מנוון שערכיו הם המספרים הטבעיים, שהתפלגותו בעלת התכונה שלכל n ו- k טבעיים,

$$P(X = n + k | X > n) = P(X = k)$$

16. ההתפלגות של X היא

א. היפרגיאומטרית

ב. פואסונית

ג. גיאומטרית

ד. התכונה הנ"ל אינה מאפיינת את סוג ההתפלגות.

17. ההתפלגות של סכום שני משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים את התכונה הנ"ל

א. מקיימת אף היא את התכונה הנ"ל

ב. לפעמים כן ולפעמים לא

ג. אף פעם אינה מקיימת את התכונה

ד. אף אחת מהנ"ל

18. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגויות גיאומטריות. ההתפלגות של $\min(X, Y)$ היא

א. תמיד בינומית שלילית

ב. בינומית שלילית רק ש- X ו- Y שווי התפלגות

ג. תמיד גיאומטרית

ד. גיאומטרית רק כש- X ו- Y שווי התפלגות.