

סמסטר ב', מועד ב', תשע"ב, 27.8.2012

בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רון פלד)

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות ברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 מקודות במבחן. אם צברת S מקודות, ציונך $\min(S, 100)$.

בהצלחה!!!

חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

תהי π פרמוטציה מקרית על המספרים מ-1 עד n הנבחרת בסיכוי שווה מ- $n!$ האפשרויות. יהי X כמות נקודות השבת ב- π . כלומר, X הוא משתנה מקרי הסופר את כמות המספרים i שעבורם $\pi(i)=i$.

א. (8 נק') הוכח כי $E(X) = 1$ וכמו כן $\text{Var}(X) = 1$.

ב. (5 נק') הוכח כי $P(X \geq 7) \leq 1/36$.

מעגל באורך k הוא סדרה (i_1, i_2, \dots, i_k) של מספרים שונים בין 1 ל- n המקיימת $\pi(i_m) = i_{m+1}$ עבור $1 \leq m \leq k-1$.

לדוגמא, הסדרה $(6, 3, 5)$ מהווה מעגל באורך 3 אם $\pi(6)=3$, $\pi(3)=5$ ו- $\pi(5)=6$.

ג. (6 נק') תהי (i_1, i_2, \dots, i_k) סדרת מספרים שונים בין 1 ל- n . הוכח כי הסיכוי שסדרה זו מהווה מעגל ב- π שווה ל- $\frac{(n-k)!}{n!}$.

ד. (7 נק') יהי π זוגי. הוכח כי הסיכוי שב- π קיים מעגל באורך $\frac{n}{2}$ בדיוק הוא $\frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

סוגיה ראשונה

גברת עדינה נוהגת ללכת בכל ערב בכדי לשמור על כושר. היא נוהגת לשים בכיסה הימני 101 פתקים. על 70 מהם רשום "לכי בניין אחד ימינה", על 30 מהם רשום "לכי בנין אחד שמאלה", ועל אחד מהם רשום "חזרי לנקודת ההתחלה". בכל שלב היא שולפת פתק מכיסה הימני (שנבחר באופן אחיד מבין הפתקים ששם), מבצעת מה שכתוב עליו ומעבירה אותו לכיסה השמאלי.

נגדיר את המשתנים המקריים הבאים:

X - המיקום שלה ביחס למיקום ההתחלתי לאחר שהוציאה את כל הפתקים. הליכה של בניין אחד ימינה מוסיפה אחד למיקומה והליכה של בניין אחד שמאלה מפחיתה אחד ממיקומה.
 N - השלב שבו היא הוציאה את הפתק "חזרי לנקודת ההתחלה".

1. איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. $P(N = 40) < P(N = 30) < P(N = 20)$

ב. $P(N = 40) > P(N = 30) > P(N = 20)$

ג. $P(N = 40) = P(N = 30) = P(N = 20)$

ד. אף אחת מהנ"ל

2. חשבו $P(X = 69)$.

א. $\frac{102}{101 \binom{100}{30}}$

ב. $\frac{69}{\binom{101}{30}}$

$$g. \frac{69}{101} \binom{100}{31}$$

ד. אף אחת מהנ"ל

3. מהי ההתפלגות של X בהנתן N ?

- א. היפרגאומטרית
- ב. בינומית
- ג. גאומטרית
- ד. אף אחת מהנ"ל

4. חשבו $E[X]$.

- א. 35
- ב. 20
- ג. 40
- ד. אף אחת מהנ"ל

5. חשבו $Cov(X, N)$.

- א. 0
- ב. -340
- ג. -1749.3
- ד. אף אחת מהנ"ל

סוגיה שניה

בתחרות שחמט מתחרות שתי קבוצות זו נגד זו. בכל קבוצה 6 שחקנים ומתקיים משחק בין כל שחקן מקבוצה א' לכל שחקן מקבוצה ב' (סך הכל 36 משחקים). קבוצה א' עדיפה במעט ובכל משחק, השחקן מקבוצה א' זוכה בסיכוי 0.2, יש תיקו בסיכוי 0.7 והשחקן מקבוצה ב' מצח בסיכוי 0.1, באופן בלתי תלוי בין משחק למשחק. הניקוד של כל שחקן הוא כמות הצחונות שצבר (תיקו או הפסד אינם נחשבים לניקוד) והניקוד של כל קבוצה הוא סכום הניקוד של כל שחקניה.

6. כיצד מתפלג סכום הניקוד של שתי הקבוצות?

- א. בינומית
- ב. היפרגאומטרית
- ג. אחיד
- ד. אף אחת מהנ"ל

7. בהנתן שהניקוד של קבוצה א' הוא 20, כיצד מתפלג הניקוד של שמשון, אחד השחקנים בקבוצה א'?

- א. בינומית
- ב. היפרגאומטרית
- ג. אחיד
- ד. אף אחת מהנ"ל

8. בהנתן שהניקוד של שמעון, אחד השחקנים מקבוצה א', הוא 2, מהי תוחלת הניקוד של קבוצה ב'?

- א. 3.3
- ב. 3.4
- ג. 3.5
- ד. 3.6

9. נסמן ב- X את כמות השחקנים מקבוצה א' שניצחו לפחות משחק אחד, ונסמן ב- Y את הניקוד של קבוצה א'. חשב את $Cov(X, Y)$. (התשובות בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)
- א. 0.32
 ב. 0.84
 ג. 1.89
 ד. 3.83

10. גרשון הוא שחקן בקבוצה א' וששון הוא שחקן בקבוצה ב'. חשב את הסיכוי ששמעון וששון יצחו כל אחד משחק אחד בדיוק. (התשובות בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)
- א. 0.06
 ב. 0.08
 ג. 0.1
 ד. 0.14

שאלות שאינן חלק מסוגיה

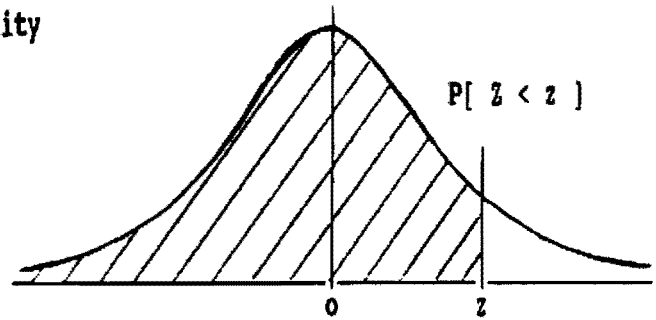
11. יהיו A_1, A_2, \dots, A_{10} מאורעות בעלי הסתברות חיובית שאיחודם הוא כלל מרחב המדגם. יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת. האם בהכרח קיים i כך ש- $E(X|A_i) \leq E(X)$?
- א. כן כאשר X מקבל בדיוק שני ערכים שונים, אבל לא באופן כללי
 ב. כן כאשר X אי-שלילי, אבל לא באופן כללי
 ג. כן כאשר המאורעות הם מהצורה $A_i = \{X \neq a_i\}$, אבל לא באופן כללי
 ד. אף אחת מהנ"ל
12. יהי X משתנה מקרי המתפלג אחיד (כלומר, X מקבל בהסתברות זהה את כל אחד מהערכים אותם הוא מקבל בהסתברות חיובית). יהי A מאורע בעל הסתברות חיובית. האם בהכרח המשתנה המקרי X בהנתן A מתפלג אחיד?
- א. כן ללא תנאים נוספים
 ב. כן אם ורק אם ההסתברות של A היא 1
 ג. כן אם A מהצורה $\{X \in S\}$ עבור קבוצה S , אבל לא באופן כללי
 ד. אף אחת מהנ"ל

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[Z < z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000