סמסטר ב׳, מועד א׳, תשס״ב
תאריך הבחינה: 25.6.02

<u>חשוב למלא:</u>

ת.ז.: ______________
מס׳ מחברת: ______________

בחינה ב״מבוא להסתברות״
המורה: פרופ׳ יצחק מלכסון

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בחומר עזר כתוב, ב- 2-3 דפי סיכומים מודפסים ובמחשבון.
ענה על כל השאלות בגוף הטופס. השתמש במחברת כטיוטה בלבד.
כל אחת משש השאלות שווה 20 נקודות, וציון השאלה המינימלי ימחק.

ב ה צ ל ח ה ! ! !

שאלה 1

1. 15 זוגות עומדים בתור לרישום נישואין. 6 מ- 30 אנשים אלה נבחרים באקראי. מה הסיכוי שאין בין ששת אלה אף זוג מקורי?
2. הכלל את התשובה במובן $n \leftarrow 15$, $2m \leftarrow 6$.
3. מהי ההסתברות שבקרב ה- $2m$ (בפרט, 6) יש בדיוק זוג מקורי אחד?

ת.ז.: ______________

מס' מחברת: ______________

<u>שאלה 2</u>

אדם הנדגם באקראי בסקוטלנד יפתח בשיחה על מזג האוויר בסיכוי 0.6 ואילו אדם שנבחר באקראי באירלנד או באנגליה יעשה זאת בסיכוי 0.8. בוחרים באקראי באחת משלוש הארצות וממנה דוגמים אנשים בזה אחר זה (נגיד, עם החזרה) באופן אקראי.

1. מה הסיכוי לכך שהאדם החמישי שנדגם מדבר על מזג האוויר?
2. מה הסיכוי לכך שהאדם החמישי שנדגם הוא הראשון שמדבר על מזג האוויר?

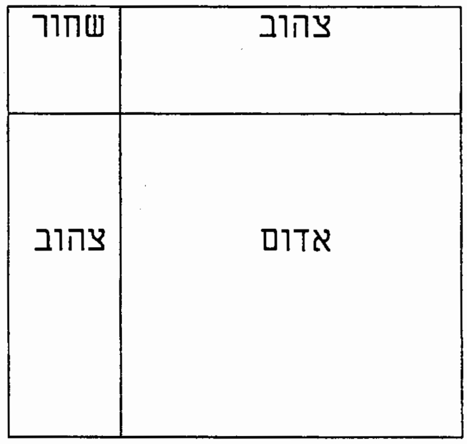
לגבי שתי השאלות הבאות, נדגמו 10 אנשים והסתבר שארבעה מהם פתחו בשיחה על מזג האוויר.

3. מה הסיכוי שהם נדגמו באירלנד?
4. מה הסיכוי שאף אחד משני האנשים הבאים שידגמו מאותה ארץ לא יפתחו בשיחה על מזג האוויר?

ת.ז.: _______________
מס' מחברת: _______________

<u>שאלה 3</u>

מרצפה מרובעת בנויה כך, מורכבת מארבעה אריחים צבעוניים, בגדלים 1X1 (שחור), 3X3 (אדום), 3X1 ו- 1X3 (צהובים):

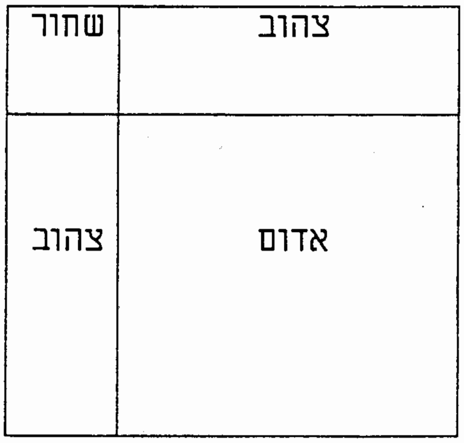


שטח מאד גדול מרוצף במרצפות כנ"ל. מפזרים בשטח זה אבנים בזו אחר זו, באופן בלתי תלוי, מספר האבנים כמספר האריחים. אין אבן מפריעה לאבן אחרת להיות באותו אריח.

1. כיצד מתפלג מספר האבנים שנופלות על אריח שחור מסוים?
2. בוחרים באקראי באחת האבנים. מה הסיכוי שבאריח בו היא נפלה נפלו עוד שלושה אבנים? לא נפלה שם עוד אבן?
3. בוחרים אריח באקראי. מה הסיכוי שנפלו בו שלוש אבנים? לא נפלה שם אף אבן?

<u>שאלה 3 -מתוקנת</u>

מרצפה מרובעת בנויה כך, מורכבת מארבעה אריחים צבעוניים, בגדלים 1X1 (שחור), 3X3 (אדום), 3X1 ו- 1X3 (צהובים):



שטח מאד גדול מרוצף במרצפות כנ"ל. מפזרים בשטח זה אבנים בזו אחר זו, באופן בלתי תלוי, מספר האבנים כמספר האריחים. אין אבן מפריעה לאבן אחרת להיות באותו אריח.

לכל אבן, הסיכוי שהיא תיפול באיזור מלבני כלשהו, פרופורציוני לשטח אותו איזור.

4. כיצד מתפלג מספר האבנים שנופלות על אריח שחור מסוים?
5. בוחרים באקראי באחת האבנים. מה הסיכוי שבאריח בו היא נפלה נפלו עוד שלושה אבנים? לא נפלה שם עוד אבן?
6. בוחרים אריח באקראי. מה הסיכוי שנפלו בו שלוש אבנים? לא נפלה שם אף אבן?

ת.ז.: ____________

מס' מחברת: ____________

שאלה 4

f שקלים המושקעים היום במכשיר פיננסי מסוים שווים מחר $f\exp(X_1)$, מחרתיים $f\exp(X_1)\exp(X_2) = f\exp(X_1 + X_2)$, וכו', כש- $X_1, X_2, \ldots$ ב"ת וש"ה עם $P(X_i = 0.1) = P(X_i = -0.1) = ½$. מתחילים בהון התחלתי $f = 1$.

1. מה חציון, תוחלת וסטית תקן ההון כעבור 200 יום? כעבור n ימים? מה הסיכוי שכעבור 50000 יום ההון יהיה מתחת לערכו ההתחלתי?

אותו משקיע שהפקיד שקל ונותן לו "לגדול" על פי הנ"ל, קונה כל יום כרטיס פיס עם הגרלה מידית, בעל סיכוי זכייה של 0.5% (ז"א, 1:200), ומתבונן בשווי תיק ההשקעות המקורי בפעם הראשונה בה הוא זוכה בפיס.

2. מתי זה יקרה, בממוצע? מה התפלגות המועד בו זה יקרה?
3. חשב את חציון ותוחלת ההון שיהיה אז למשקיע.

(מספיק להיעזר בקירוב ל- t קטן: $\exp(t) = e^t \approx 1 + t + t^2/2 + t^3/6$.)

ת.ז.: ______________
מס' מחברת: ______________

שאלה 5

1. תן דוגמא להתפלגות משותפת של שני משתנים מקריים X ו- Y עם תוחלות $E(X) = 1, E(Y) = 2$, שונויות $Var(X) = 4, Var(Y) = 1$ ומקדם מתאם ביניהם ½.
2. תן שתי התפלגויות משותפות של שני משתנים מקריים X ו- Y עם התפלגויות שוליות $P(X=1) = 1 - P(X=0) = 0.7, P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = 0.8$, האחת עם מקדם מתאם חיובי וגבוה ככל שניתן, והאחרת עם מקדם מתאם שלילי בעל ערך מוחלט גבוה ככל שניתן.

(יינתן ניקוד חלקי למתאם בעל הסימן הנכון אך לא אופטימלי, ובונוס על הוכחת אופטימליות.)

3. תן דוגמא למרחב הסתברות ובו שלושה משתנים מקריים X, Y ו- Z כך ש- X ו- Y תלויים אך בהינתן Z, מתקיים ש- X ו- Y בלתי תלויים.

(התבונן היטב בטופס הבחינה!)

ת.ז.: ______________

מס' מחברת: ______________

שאלה 6

1. השתמש בשיטת ההיטוגרמה בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית וחשב בקירוב את $P(X=n)$ עבור $X \sim Bin(2n, ½)$. כעת השתמש בנוסחת Stirling

$$n! \approx (n/e)^n \, sqrt(2 \pi n)$$

לקירוב הערך המדויק של $P(X=n)$. השווה בין שתי התוצאות.

2. $X \sim P(100)$, פואסון עם פרמטר $\lambda = 100$. מה יש לנוסחת Stirling להגיד על ערכיהן של ההסתברויות $P(X = 100), P(X = 103)$?
3. כעת $X \sim P(10000)$. נמק של- X התפלגות בקירוב נורמלית, והשווה בין הקירוב הנורמלי לחסם צ'בישב של $P(0.975 \leq X/10000 \leq 1.025)$.

(ערכים נבחרים של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית:
$\Phi(0) = 0.5, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987$.)