

## פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר רון פלד מ 24/06/13

### חלק א

#### סעיף א

בהינתן  $(X_k = x_k)$  יש  $x_k$  פרטים שכל אחד מהם מוליד בממוצע  $2p$  צאצאים. ההוכחה לחלק השני היא באינדוקציה:

$$E(X_k) = E(E(X_k | X_{k-1})) = 2pE(X_{k-1}) = \dots$$

#### סעיף ב

$V(X_{k+1}) = V(E(X_{k+1} | X_k)) + E(V(X_{k+1} | X_k))$   
 מתקיים  $E(X_{k+1} | X_k) = 2pX_k$  ולכן  $V(E(X_{k+1} | X_k)) = (2p)^2 V(X_k)$ .  
 $E(V(X_{k+1} | X_k)) = E(X_k) \cdot 2^2 p(1-p) = (2p)^k \cdot 4p(1-p)$   
 כאשר המעבר האחרון הוא לפי אינדוקציה.

#### סעיף ג

$X_k$  מקבל רק ערכים אי שליליים ולכן נוכל להשתמש באי שיוויון מרקוב.  
 $X_k$  מקבל רק ערכים שלמים ולכן, המאורע שהוא גדול מ 0 זהה למאורע שהוא גדול או שווה ל 1.

$$P(X_k > 0) = P(X_k \geq 1) \leq \frac{E(X_k)}{1} = 0.8^{100}$$

### חלק ב

|    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| א  | א  | ב  | ד  | א | א | ב | ד | ג | ב | א | ב | א |

### הסברים קצרים

#### שאלה 1

$$E(S_1) = E_{X_1}(S_1 | X_1) = E(3.5X_1) = 3.5 \frac{1+13}{2}$$

## שאלה 2

בסיכוי  $\frac{10}{13}$  יוטלו קוביות ( אם ה-13 אינה בין שלושת הראשונות ). ואז התוחלת היא

$$\frac{1}{10} \cdot 13 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1+12}{2}$$

## שאלה 3

$$E(S_1) = 24.5 \quad \text{ו} \quad E(X_1) = 7$$

$$\begin{aligned} E(S_1 X_1) &= E(3.5 X_1 X_1) = 3.5 E(X_1^2) = 3.5 [V(X_1) + E^2(X_1)] = \\ &= 3.5 \left[ \frac{(13-1+1)^2 - 1}{12} + 49 \right] = 220.5 \\ \text{Cov}(X_1, S_1) &= 220.5 - 7 \cdot 24.5 \end{aligned}$$

## שאלה 4

הקלף 2 צריך להתקבל בפעם השניה. הקלף 13, צריך להתקבל בפעם השלישית או הרביעית. הסיכוי לזה הוא  $\frac{1}{13} \cdot \frac{2}{12}$

## שאלה 5

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1, X_1 \neq 13) \cdot \frac{1}{6} + P(X_2 = 2, X_1 \neq 13) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \\ = \frac{1}{13} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{13} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \end{aligned}$$

( הסתכלנו קודם על התוצאה השניה ).

## שאלה 6

זהו איחוד ש 6 מאורעות. חיתוכים לא ריקים יש בין הראשון והשישי, הראשון והחמישי, השני והשישי. נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

## שאלה 7

לאחר הופעת האפס הראשון, כל ספרה אחרת תופיע בסיכוי חצי לפני האפס הבא. יש כאן תוחלת של סכום 9 אינדיקטורים.

## שאלה 8

כל הופעה של 0 לאחר הופעת 9 היא אחרונה עד הופעת נוסף בסיכוי חצי. יתכן שלא יהיו כלל הופעות של 0.

### שאלה 9

$$8 \cdot 10^3 + \left[ \frac{0+9}{2} \sum_{k=1}^3 10^k \right]$$

### שאלה 10

הספרה ה- $k$  תופיע ותהיה שונה מ 9 בסיכוי  $0.9^k$ . לכן הספרה ה- $k$  תורמת לתוחלת יותר מ  $0.9^k \cdot 4 \cdot 10^{k-1}$ . לכן תוחלת סכום התרומות של הספרות היא אין סוף.

---

### שאלה 11

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$Cov(X, Y)$  מקבל ערך מכסימלי כאשר  $\rho(X, Y) = 1$  ומקבל ערך מינימלי כאשר

$$\rho(X, Y) = -1. \quad Cov(X, Y) = \rho(X, Y) \sqrt{V(X)V(Y)}$$

### שאלה 12

$$E((X - Y)^2) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y) = [E(X^2) - E^2(X)] + [E(Y^2) - E^2(Y)]$$

### שאלה 13

נתייחס רק למשתנה בדיד. ההסבר לגבי משתנה אחר הוא דומה.

$$\sum_{x \geq 1} P(X = x)x < \infty \quad \text{גורר} \quad \sum_{x \geq 1} P(X = x)x^3 < \infty \quad \text{גורר} \quad \sum_{x \geq 0} P(X = x)x^3 < \infty$$

$$\sum_{x \geq 0} P(X = x)x < \infty. \quad \text{ההסבר לגבי החלק השלילי הוא דומה.}$$

---

שלומי