

**מסטר ב', מועד א', תשע"ג, 24.6.2013**

**בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רון פלד)**

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות הברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת  $S$  נקודות, ציוןך  $\min(S, 100)$ .

בהצלחה!!!

## חלק א' – שאלה פתוחה – 19 נקודות

לגבי חיידקים מסוג פרקולציטים ידועים הנתונים הבאים:

אורך חיי כל חיידק הוא יום אחד בדיוק. בתום כל יום, כל חיידק מוליד שני חיידקים ומת בסיכוי  $p$  או מת ללא צאצאים בסיכוי  $1-p$ , באופן ב"ת בחיידקים אחרים (בעבר ובהווה). נסמן ב- $X_k$  את כמות החיידקים ביום  $k$ . נתון כי  $X_0 = 1$ .

(א) (6 נק') הוכיחו כי לכל  $k \geq 0$  מתקיים  $E[X_{k+1} | X_k] = 2pX_k$ . הסיקו ש-  
 $E[X_k] = (2p)^k$ .

(ב) (8 נק') הוכיחו כי לכל  $k \geq 0$  מתקיים  $Var(X_{k+1}) = 4p^2Var(X_k) + 2(1-p)(2p)^{k+1}$ .

(ג) (5 נק') בהינתן ש- $p = 0.4$  הוכיחו כי  $P(X_{100} > 0) \leq (0.8)^{100}$ .

## חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 91 נקודות)

### סוגיה ראשונה

לרוחמה יש 13 קלפים הממוספרים 1, ..., 13, וכן 13 קוביות הוגנות. רוחמה שולפת בכל יום קלף אחד ללא החזרה, באופן אחיד מבין הקלפים שנותרו, עד שלראשונה יוצא קלף מספר 13 ואז מפסיקה. בכל יום שבו שלפה קלף (גם כשיוצא קלף 13) היא נותנת לרחמים קוביות בכמות הזוהי למספר שעל הקלף ששלפה באותו היום. בימים בהם לא שלפה קלף היא לא נותנת לרחמים קוביות. רחמים מטיל מיד את הקוביות שקיבל באותו היום (באופן בלתי תלוי בין הקוביות) ומיד לאחר הטלתן מחזיר אותן לרוחמה.

לכל  $1 \leq i \leq 13$  נגדיר את המשתנים המקריים הבאים:

$X_i$  - מספר הקוביות שקיבל רחמים בסיבוב  $i$  (כאשר  $X_i = 0$  אם רוחמה הוציאה את קלף מספר 13 לפני יום  $i$ ).

$S_i$  - סכום התוצאות של הקוביות שרחמים הטיל בסיבוב  $i$ .

1. מהי  $E[S_1]$ ?

א. 24.5

ב. לא ניתן לחישוב ללא הערך של  $X_1$ .

ג.  $3.5 \cdot X_1$

ד. אף אחת מהנ"ל.

2. מהי  $E[X_4]$  ?

א.  $\frac{9}{2}$

ב.  $\frac{11}{2}$

ג.  $\frac{70}{13}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

3. מהי  $Cov(X_1, S_1)$  ?

א. 49

ב. 134.75

ג. 196

ד. אף אחת מהנ"ל.

4. מה הסיכוי שביום השני רחמים מקבל 2 קוביות וביום החמישי לא מקבל אף קוביה?

א.  $\frac{2}{13}$

ב.  $\frac{1}{78}$

ג.  $\frac{1}{156}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

5. מהו הסיכוי ש  $S_2 = 2$  ?

א.  $\frac{11}{78}$

ב.  $\frac{11}{468}$

ג.  $\frac{77}{5616}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

## סוגיה שניה

אברם בוחר ספרות בזו אחר זו באקראי כך שבכל סיבוב לכל אחת מהספרות 0,1,...,9 יש סיכוי שווה להיבחר באופן בלתי תלוי בבחירות הקודמות. אברם רושם את הספרות אותן הוא בוחר משמאל לימין.

6. מה הסיכוי שבמהלך 10 הסיבובים הראשונים מופיע לפחות פעם אחת הרצף

?10001

א.  $\frac{6}{10^5}$

ב.  $\frac{6}{10^5} - \frac{1}{10^{10}}$

ג.  $\frac{5}{10^5}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

7. מה תוחלת מספר הספרות השונות שמופיעות בין האפס הראשון לשני?

א. 4

ב. 4.5

ג. 5

ד. אף אחת מהנ"ל.

8. כיצד מתפלג מספר הפעמים שמופיעה הספרה 0 בין שני המופעים הראשונים של

הספרה 9?

א. אותה התפלגות כמו X-1 כאשר X מתפלג גאומטרי.

ב. פואסוני.

ג. אחיד.

ד. אף אחת מהנ"ל.

9. בהינתן שהספרה הראשונה שאברם בחר היא 8, מה תוחלת המספר שנוצר מ-4

הספרות הראשונות? (לדוגמא: אם המספרים שנבחרו הם: 8,7,0,1,4,6,... אזי

המספר הוא 8,701)

א. 8499.5

ב. 8500.5

ג. 8500

ד. אף אחת מהנ"ל.

10. מהי התוחלת של המספר שנוצר מהספרות שאברם רושם עד להופעה הראשונה של הספרה 9 (כולל)? (לדוגמא: אם המספרים שנבחרו הם:  $0, 0, 1, 4, 6, 9, \dots$  אזי המספר הוא 1,469 ואם הספרה 9 מופיעה כבר בסיבוב הראשון אזי המספר הוא 9)

א.  $10^{10} + 9$

ב.  $9 + 4 \sum_{k=1}^9 10^k$

ג.  $\frac{10^{10} - 1}{9} + 9$

ד. אף אחת מהנ"ל.

### שלוש שאלות שאינן חלק מסוגיה

11. נתונים משתנים מקריים  $X$  ו- $Y$  המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נתון כי  $Var(X) = 1$  ו- $Var(Y) = 4$ . נסמן  $v = Var(X + Y)$  בתנאים אלו, מהו הערך המקסימלי האפשרי עבור  $v$  ומהו הערך המינימלי האפשרי עבור  $v$ ?

א.  $v$  יכול להיות גדול כרצוננו, כלומר הערך המקסימלי האפשרי הוא אינסוף.

ב. הערך המקסימלי האפשרי הוא 9 והמינימלי האפשרי 1.

ג. הערך המקסימלי האפשרי הוא 5 והמינימלי האפשרי 3.

ד. אף אחת מהנ"ל.

12. יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נתון כי  $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים, שווי-התפלגות ובעלי שונות. למה שווה  $E[(X - Y)^2]$ ?

א. הביטוי תמיד שווה ל- $2Var(X)$ .

ב. הביטוי אינו בהכרח מוגדר היטב, כלומר יתכן ש- $(X - Y)^2$  אינו בעל תוחלת.

ג. אם  $E[X] = E[Y] = 0$  אז הביטוי שווה ל- $Var(X) + Var(Y)$  אבל אחרת אולי הוא שווה למשהו אחר.

ד. אף אחת מהנ"ל.

13. נתון משתנה מקרי  $X$  המקיים ש- $X^3$  בעל תוחלת. האם נובע ש- $X$  בעל תוחלת?

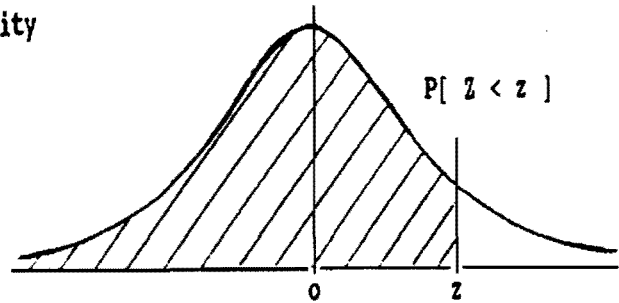
- א. כן, ללא תנאים נוספים.
- ב. כן, אם ידוע גם ש- $P(X \geq 0) = 1$  אבל לא בהכרח ללא תנאים נוספים.
- ג. כן, אם ידוע גם ש- $X^2$  בעל תוחלת אבל לא בהכרח ללא תנאים נוספים.
- ד. אף אחת מהנ"ל.

## STANDARD STATISTICAL TABLES

### 1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value  $z$  i.e.

$$P[ Z < z ] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
$z$	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
$P$	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000