# פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' אסף נחמיאס מ 23/06/15

| שאלה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| תשובה | ד | א | ג | ג | ב | ב | ג | ב | ד | ב | ג | ג | ג | א | ג |

## הסברים קצרים

### שאלה 1

$$E(Y)=E(Y\mid X)=E(pX)=pE(X)=\frac{p}{q}$$

### שאלה 2

$$V(Y)=E(V(Y\mid X))+V(E(Y\mid X))=E(p(1-p)X)+V(pX)=$$
$$=\frac{p(1-p)}{q}+p^2V(X)=\frac{p(1-p)}{q}+p^2\,\frac{1-q}{q^2}$$

### שאלה 3

$$E(Y)=\frac{p}{q}\quad,\quad E(X)=\frac{1}{q}$$
$$E(XY)=E(XY\mid X)=E(XpX\mid X)=E(pX^2)=pE(X^2)=$$
$$=p[V(X)+E^2(X)]=p\left[\frac{1-q}{q^2}+\frac{1}{q^2}\right]=\frac{p(2-q)}{q^2}$$
$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{p(2-q)}{q^2}-\frac{p}{q^2}=\frac{p(1-q)}{q^2}$$

### שאלה 4

$$P(Y=y\mid Y=X)=\frac{q(1-q)^{y-1}p^y}{\sum_{k=1}^{\infty}q(1-q)^{k-1}p^k}=\frac{pq[(1-q)p]^{y-1}}{pq\frac{1}{1-(1-q)p}}=$$
$$=[(1-q)p]^{y-1}[1-(1-q)p]$$

לכן, בהינתן $(Y=X)$, התפלגות $Y$ היא $G(1-(1-q)p)$ ולכן היא בעלת תוחלת $\frac{1}{1-p(1-q)}$.

**<u>שאלה 5</u>**

מחכים זמן בעל התפלגות $G(0.5)$ עד קבלת ה"עץ" הראשון. אחר כך מחכים זמן בעל התפלגות $G(0.5)$ ותוחלת 2, עד קבלת ה"פלי" הראשון שאחריו.

**<u>שאלה 6</u>**

כדי שאחד מאלה יקרה, צריך לחכות ל"עץ" ואז כל אחד מהשניים יקרה בסיכוי שווה.

**<u>שאלה 7</u>**

אם בהטלה הראשונה יתקבל "פלי", אז בודאות יתקבל "פלי" ו"עץ" לפני פעמיים "עץ".
אם בהטלה הראשונה יתקבל "עץ", אז הכל תלוי בתוצאת ההטלה השניה.

**<u>שאלה 8</u>**

מחכים זמן בעל התפלגות $G(0.5)$, עד להופעת "עץ" ראשון. יש סיכוי של חצי שמיד אחר-כך נקבל את הרצף.אחרת נחזור למצב ההתחלתי לאחר שביצענו מספר בעל תוחלת 2+1 של הטלות.

---

**<u>שאלה 9</u>**

יהי $Z$ - מספר התשובות הנכונות.

$$X = 3Z - (27 - Z) = 4Z - 27$$

$$V(X) = V(4Z - 27) = 4^2 V(Z) = 16 \cdot 27 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 81$$

<u>הערה</u>

אפשר לפתור אלטרנטיבית לפי סכום של שונויות של ציוני השאלות השונות ( ציוני השאלות השונות הם ב"ת ).

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} V(X_i) =$$

$$= 27\left[\frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{3}{4}(-1)^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4}(-1)\right)^2\right]$$

**<u>שאלה 10</u>**

$$V(X) = 81 \quad , \quad E(X) = 0$$

$$P(X \geq 18) \leq \frac{81}{18^2} = \frac{1}{4}$$

**<u>שאלה 11</u>**

$$P(X \geq 18) = 1 - P(X < 18) \cong 1 - \phi\left(\frac{18 - 0}{\sqrt{81}}\right)$$

**שאלה 12**

$$E(Z)=18\cdot 3+9\left[\frac{1}{3}\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot 1\right]=57$$

יהי $Y$ מספר הנכונות מבין אלה שהיא מנחשת.

$$Z=18\cdot 3+\left[3Y-(9-Y)\right]=45+4Y$$

$$V(Z)=V(45+4Y)=V(4Y)=4^2\cdot 9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=32$$

---

**שאלה 13**

$e_0$ - התוחלת המבוקשת ( במצב ההתחלתי ).

$e_1$ - התוחלת כאשר נמצאים בפינה שכנה להתחלתית.

$e_2$ - התוחלת כאשר נמצאים בפינה במרחק 2.

$e_3$ - התוחלת כאשר נמצאים בפינה הנגדית.

$$\begin{cases} e_0=1+e_1 \\ e_1=1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}e_2 \\ e_2=1+\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}e_3 \\ e_3=1+e_2 \end{cases}$$

( בכל מקרה מבזבזים צעד ואז עוברים למצב אחר ).

<u>הערות לגבי דרכים אחרות</u>

השרשרת המתארת את ההילוך הזה היא בעלת 8 מצבים סימטריים. השרשרת בלתי פריקה, ולכן יש לה וקטור סטציונרי יחיד. בוקטור זה כל אחד מהרכיבים שווה ( גם לפי דו סטוכסטיות ). מתקיים $E_i=\frac{1}{\pi_i}$.

זהו הילוך מקרי על גרף. בהילוך כזה ההסתברות הסטציונרית של כל צומת שווה לדרגתה חלקי סכום הדרגות של הצמתים.

אבל העדפתי לתת את הדרך שמתבססת על פתרון משוואות, כי היא מובילה לפתרון נוח של שאלה 15.

**שאלה 14**

יש 3 מצבי ביניים. מהמצב ההתחלתי בודאות עוברים לראשון שביניהם. מהאחרון בודאות עוברים לאחר מסוים.

$a$ - התוחלת במצב ההתחלתי.

$$\begin{cases} a=e_1 \\ e_1=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}e_2 \\ e_2=\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}(1+e_3) \\ e_3=e_2 \end{cases}$$

<u>הערה</u>

התוחלת המבוקשת שווה ל $\frac{\pi_8}{\pi_1}$ , כאשר $\pi_i$ הן ההסתברויות הסטציונריות של קודקודי הקוביה. ההסתברויות הסטציונריות מייצגות את השכיחויות.

**<u>שאלה 15</u>**

משיקולי סימטריה, זה שווה ל $e_3$ ממערכת המשוואות של שאלה 13.

---

שלומי