

פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' גילת מ 22/06/09

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
					+			+				+			+		+			א
	+		+							+	+									ב
+		+		+		+	+						+	+				+	+	ג
									+							+				ד

מספר הערות קצרות

שאלה 1

אם בהטלה הראשונה יתקבל 1 אז בודאות יתקבל 10 לפני 0.00. אם בהטלה הראשונה יתקבל 0 ובשניה 1, אז שוב בודאות יתקבל 10 לפני 0.00.

שאלה 2

מחכים זמן בעל התפלגות $G(0.5)$ שהוא בעל תוחלת 2, עד להופעת 0 ראשון. יש סיכוי של חצי שמיד אחר-כך נקבל את הרצף. אחרת נחזור למצב ההתחלתי לאחר שבזבזנו זמן בעל תוחלת $2 + 1$ צעדים.

שאלה 3

מחכים זמן בעל התפלגות $G(0.5)$ ובעל תוחלת 2 עד קבלת ה-1 הראשון. אחר-כך מחכים זמן בעל התפלגות $G(0.5)$ ותוחלת 2 עד קבלת ה-0 הראשון שאחר-כך.

שאלה 4

לא גיאומטרי כי למשל לא ניתן לקבל את הערך 1. לא היפרגאומטרי כי למשל לא ניתן לחסום מראש את הערך המתקבל. בניגוד לזמן בצפיה ל 10, כאן התפלגות הזמן אינה שווה להתפלגות של סכום שני משתנים גיאומטרים שווי פרמטר ב"ת, לכן היא אינה בעל התפלגות בינומית שלילית. אילו היתה בינומית שלילית אז היה צריך להתקיים $n = 2$ כי זהו הערך המינימלי שיכול להתקבל. אך מקרים פרטיים פשוטים לא מסתדרים עם $n = 2$ ואף ערך של p .

שאלות 5,6

תחילה צריך להגיע לרצף של $r - 1$ אפסים. לאחר הצעד הבא בסיכוי חצי מקבלים את הרצף ובסיכוי חצי חוזרים למצב ההתחלתי לאחר שבזבזנו צעדים. חלק מהאפשרויות סותרות תוצאות של מקרים פרטיים פשוטים כמו המקרה ש $r = 2$.

שאלה 7

$$B(24,05)$$

שאלה 8

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{24}$$

שאלה 9

תלויים למשל כי יתכן שיתקיים $(X_n = 24)$ ויתכן שיתקיים $(X_{n-1} = 24)$, אך הצירוף שלהם בלתי אפשרי. שווי התפלגות כי בהינתן שבתקופה מסוימת לכל ילד יש סיכוי שווה להיות בכל אחת מהקבוצות באופן ב"ת בילדים האחרים, אז כך גם המצב בשלב הבא.

שאלה 10

$$E(X_1 | X_0) = \frac{X_0}{24}(X_0 - 1) + \frac{24 - X_0}{24}(X_0 + 1)$$

שאלה 11

בתשובה לשאלה 11 ראינו שהתוחלת המותנה היא פונקציה לינארית. מקדם התחזית הלינארית הוא $\rho \frac{\sigma(X_1)}{\sigma(X_0)}$. מכיון שסטיות התקן של המשתנים הן זהות אז מקדם המתאם שווה למקדם התחזית הלינארית. אפשר גם לפתור באמצעות הנוסחה לחישוב מקדם המתאם.

שאלה 12

מתקיים $Y_n = 24 - X_n$. מקדם המתאם בין משתנה לבין פונקציה לינארית מונוטונית יורדת שלו הוא תמיד -1 .

שאלה 13

הראשון שאינו C הוא A בהסתברות זו.

שאלה 14

התפלגות מיקום ה-C הראשון היא $G(\gamma)$. לכן תוחלת מספר התוצאות שלפני ה-C הראשון היא $1 - \frac{1}{\gamma}$. כל אחת מאלה היא A בהסתברות $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$. או בדרך אחרת: התפלגות מיקום ה-C הראשון מבין אלה שהם A או C היא $G\left(\frac{\gamma}{\alpha + \gamma}\right)$ ותוחלת $\frac{\alpha + \gamma}{\gamma}$. מבין ההטלות שעד אותו מקום, רק האחרון שבהם הוא C.

שאלה 15

מתקיים $X_n + Y_n = n - Z_n$.

שאלה 16

$$X_n + Y_n - (1 - \gamma)\gamma^{-1}Z_n = n - Z_n - (1 - \gamma)\gamma^{-1}Z_n$$

עבור כל משתנה X וקבוע c מתקיים $Var(cX) = c^2 Var(X)$.

שאלה 17

$$\rho(X_n, Y_n) = \frac{Cov(X_n, Y_n)}{\sqrt{Var(X_n)Var(Y_n)}} = \frac{n \cdot Cov(X_1, Y_1)}{\sqrt{n \cdot Var(X_1) \cdot n \cdot Var(Y_1)}}$$

שאלה 18

על-פי טענה כללית לגבי משתנה פואסוני "שמתפצל". על פי טענה זו כל אחד מהפיצולים הוא פואסוני.

שאלה 19

על-פי טענה כללית לגבי משתנה פואסוני "שמתפצל".

שאלה 20

לפי נוסחת השונות של משתנה פואסוני.

שלומי