

סמסטר ב', מועד א', תשס"ט  
 תאריך הבחינה: 22.06.2009  
 מספר קורס: 0365 - 1102

מספר מחברת \_\_\_\_\_

מספר ת.ז. \_\_\_\_\_

### בחינה במבוא להסתברות

צוות ההוראה: פרופ' דוד גילת – שיעור, יובל הלר ורועי ספר - תרגיל

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף (אחד בלבד) של סיכום אישי ובחומר העזר המצורף לשאלון.  
 מחשב כיס – מותר, אך מיותר.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.  
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות שלכל היותר אחת מהן נכונה. סמן בטבלת התשובות את זו הנראית לך נכונה.  
 אם כל 3 התשובות נראות לך לא נכונות, סמן (ד).  
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מקנה 6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושאת 2 נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

								דוגמה:
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	א
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	ב
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	ג
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	ד
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0	ניקוד:
ג	ג	ב	א	ג	ב	ב	א	תשובה נכונה:

מספר נקודות הזכות (החובה) המירבי הוא 120 (120).  
 הציון של הצובר N נקודות יהיה  $\min\{100, \max\{N, 0\}\}$ .

### בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6
א						
ב						
ג						
ד						

	7	8	9	10	11	12
א						
ב						
ג						
ד						

	13	14	15	16	17	18	19	20
א								
ב								
ג								
ד								

## סוגיה I

מתבצעת סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן ( $p = 1/2$ ) שעל צידו האחד מוטבע 0 ועל צידו השני מוטבע 1.

1. מה הסיכוי שהרצף 10 (קודם 1 ואחר-כך 0) יופיע לפני הרצף 00 (שני אפסים בזה אחר זה)?  
 (א)  $1/4$  (ב)  $1/2$  (ג)  $3/4$

2. תוחלת מספר ההטלות עד להופעת הרצף 00 היא: (א) 4 (ב) 5 (ג) 6

3. תוחלת מספר ההטלות עד להופעת הרצף 10 היא: (א) 4 (ב) 5 (ג) 6

4. מספר ההטלות עד להופעת הרצף 00 מתפלג: (א) גיאומטרית (ב) בינומית-שלילית (ג) היפר-גיאומטרית

יהי  $T_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) מספר ההטלות עד שלראשונה מופיע רצף של  $r$  אפסים בזה אחר זה.

(לדוגמא: עבור סדרת הטלות שתחילתה 1001110001 (משמאל לימין)  $T_1 = 2$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 9$ )

5. התוחלת המותנה  $E(T_r | T_{r-1})$  שווה ל-: (א)  $T_{r-1} + (1/2)E(T_r) + 1$  (ב)  $T_{r-1} + 2$  (ג)  $T_{r-1} + E(T_r) + 1/2$

6. התוחלת  $E(T_r)$  שווה ל-: (א)  $2^r$  (ב)  $1 + 2^{r-1}$  (ג)  $2(2^r - 1)$

## סוגיה II

מחלקים קבוצה של 24 ילדים (ביניהם שאול, דוד ושלמה) לשתי קבוצות A ו-B, כך שכל אחד מהם, באופן בלתי תלוי באחרים, שייך בסיכויים שווים לכל אחת משתי הקבוצות. יהי  $X_0$  מספר הילדים בקבוצה A.

7. ההתפלגות של  $X_0$  היא: (א) גיאומטרית (ב) היפר-גיאומטרית (ג) בינומית

לאחר החלוקה הראשונית, בוחרים באקראי ילד אחד מ-24 הילדים (כלומר, מהאיחוד של שתי הקבוצות) ומעבירים אותו מהקבוצה שלו לקבוצה האחרת. חוזרים על פעולה זו (בחירה והעברה) פעם אחר פעם. יהי  $X_n$  מספר הילדים בקבוצה A ו- $Y_n$  מספרם בקבוצה B אחרי  $n$  העברות כאלה.

8. מה הסיכוי ששאול, דוד ושלמה ייבחרו בחלוקה הראשונית באותה קבוצה ויישארו בה גם לאחר ההעברה הראשונה?

(א)  $\frac{7}{32}$  (ב)  $\frac{7}{64}$  (ג)  $\frac{3}{16}$

9. המשתנים המקריים  $X_0, X_1, X_2, \dots$  הם: (א) בלתי תלויים ושווי התפלגות (ב) שווי התפלגות אך תלויים (ג) תלויים ובעלי התפלגויות שונות זו מזו.

10. התוחלת המותנה  $E(X_1 | X_0)$  היא: (א)  $X_0 - 1$  (ב)  $\frac{23}{24}X_0 + 1$  (ג)  $\frac{11}{12}X_0 + 1$

11. מקדם המתאם  $\rho(X_0, X_1)$  הוא: (א)  $\frac{1}{2}$  (ב)  $-\frac{1}{2}$  (ג)  $\frac{23}{24}$

12. מקדם המתאם  $\rho(X_n, Y_n)$  הוא: (א) -1 (ב) 0 (ג) +1

### סוגיה III

נתון ניסוי בעל 3 תוצאות אפשריות A, B, C עם הסתברויות חיוביות  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ) בהתאמה. מתבצעת סדרה של ניסויים בלתי תלויים כאלה.

13. הסיכוי שהתוצאה A תופיע לפני התוצאה B בסדרת הניסויים הוא: (א)  $\frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$  (ב)  $\frac{\beta}{\beta + \gamma}$  (ג)  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$

14. תוחלת מספר ה-A-ים לפני הופעת ה-C הראשון היא: (א)  $\frac{\alpha + \beta}{\gamma}$  (ב)  $\frac{\alpha}{\gamma(\alpha + \beta)}$  (ג)  $\frac{\alpha}{\gamma}$

יהיו  $X_n, Y_n, Z_n$  מספרי ה-A, B, C (בהתאמה) שהתקבלו ב-n הניסויים הראשונים.

15. מצאו  $0 < c$  כך שהתוחלת של  $X_n + Y_n - cZ_n$  שווה ל-0:

(א)  $c = (1 - \gamma)\gamma^{-1}$  (ב)  $c = \sqrt{n}(\alpha + \beta)$  (ג) אין c כזה.

16. מהי השונות של  $X_n + Y_n - cZ_n$  כאשר  $c = (1 - \gamma)\gamma^{-1}$ ? (א)  $n\gamma^2$  (ב)  $n(1 - \gamma)$  (ג)  $n(1 - \gamma)\gamma^{-1}$

17. יהי  $\rho_n$  מקדם המתאם בין  $X_n$  ל- $Y_n$ . הסדרה  $\{\rho_n\}$  היא:

(א) יורדת ממש (ב) נשארת קבועה, כלומר  $\rho_n = \rho_1$  לכל n (ג) שואפת לאפס כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

בניח שחוזרים על הניסוי הנ"ל מספר סופי של פעמים אלא שמספר החזרות לא נקבע מראש כי אם על פי הגרלה פואסונית עם תוחלת  $\lambda$ , כלומר  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , בלתי תלוי בכל השאר, וכאשר  $N = n$  חוזרים על הניסוי n פעמים. יהיו  $X_N, Y_N, Z_N$  מספרי הפעמים שהתקבלו התוצאות A, B, C בהתאמה.

18. ההתפלגות של  $X_N$  היא: (א) גיאומטרית (ב) בינומית (ג) פואסונית

19. ההתפלגות המשותפת של  $(X_N, Y_N, Z_N)$  היא:

(א) טרינומית (ב) התפלגות של 3 מ"מ פואסוניים ב"ת (ג) התפלגות של 3 מ"מ בינומיים ב"ת.

20. השונות של  $X_N$  היא: (א)  $\lambda\alpha(1 - \alpha)$  (ב)  $\lambda^2\alpha^2$  (ג)  $\lambda\alpha$