

מספר מחברת: _____

מספר ת.ז.: _____

בחינה בקורס מבוא להסתברות
שנת תשע"ב, סמסטר א', מועד א'
מרצה: אילון סולן

תאריך הבחינה: 21.2.2012.

מספר הקורס: 1102 – 0365.

זמן הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: מחשבון כיס, 4 (ארבעה) דפי נוסחאות.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 2 סוגיות. רצוי לענות על כולן. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה. סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמורד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X	X	
		X				X	X
			X		X		X
				X		X	X

דוגמא:

0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.

בהצלחה!!

	1	2
א		
ב		
ג		
ד		

	3	4	5	6	7	8	9
א							
ב							
ג							
ד							

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
א											
ב											
ג											
ד											

שתי שאלות שאינן קשורות לסוגייה

1. יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים. התוחלת המותנה $E[X + Y|Y]$

$$E(X+Y|Y) = E(X|Y) + E(Y|Y)$$

(א) שווה תמיד ל- $E[X]$.

(ב) שווה תמיד ל- $E[X|Y]$.

(ג) שווה תמיד ל- $E[X|Y] + Y$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

2. יהי X משתנה מקרי חסום (שיכול לקבל ערכים חיוביים ושליילים) ויהי $c > 0$.

(א) ההוכחה של אי-שוויון מרקוב אומרת למעשה כי $P(X \geq c) \leq \frac{E[X]}{c}$

(ב) מאי-שוויון צ'בישב נובע כי $P(X \geq c) \leq P(|X| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}$

(ג) ממשפט הגבול המרכזי נובע כי $P\left(\frac{X - E[X]}{\sigma_X} \geq c\right)$ שווה בקירוב ל- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty e^{-x^2/2} dx$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

לא $\frac{1}{c}$ כי $\frac{1}{c}$ ש'וויון מרקוב מזכיר רק עם משתנה
 $\frac{1}{c}$ שלים"ם.

לא $\frac{1}{c^2}$ כי $E(X) = 0$ יבוא עם
 לא $\frac{1}{c}$ כי משפט פסקלס (פאינר) לא תלם עם
 משתנה גזר.

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם
 מחוץ לאתר של שלומי.

סוגייה ראשונה

בכד תשעה כדורים הממוספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. אלברט מוציא כדורים מהכד בזה אחר זה ללא החזרה.

3. מה היא ההסתברות שהכדור השני שאלברט הוציא הוא בעל ספרה גדולה יותר מזו של הכדור הרביעי?

- (א) $\frac{7}{18}$
 (ב) $\frac{4}{9}$
 (ג) $\frac{1}{2}$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- מ'קו"ס' סמל'ה
 (ה'ס'כ"מ'ם של כל אלברט מ'ה'ם שול'ם).

4. בהינתן שסכום הספרות של שלושת הכדורים הראשונים שאלברט הוציא הוא 8, מה היא ההסתברות המותנית שהכדור הראשון שאלברט הוציא ממסופר בספרה 1?

- (א) $\frac{1}{9}$
 (ב) $\frac{1}{3}$
 (ג) $\frac{4}{9}$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- ק'ם אל'ם אלברט מ'ש'ת ק'כ'ז'ים (מ'ל'ם) 1
 אל'ם (ה'ס'כ'ם) ת'ק'ם מ'ב'ו'ת ז'כ'ום מ' (8+3+2)
 אל'ם אל'ם מ'ע'ם אל'ם מ'כ'ו'ם מ'פ'ע'ם ק'ר'ם אל'ם מ'ה'ק'מ'ת

5. מה היא ההסתברות שהכדורים בעלי ספרות זוגיות יצאו בסדר עולה; כלומר, הכדור הממוספר 2 יצא לפני הכדור הממוספר 4, 4 לפני 6, 6 לפני 8? (לאו דווקא בהוצאות עוקבות. לדוגמה, 9, 2, 4, 5, 7, 6, 1, 3, 8, עונה על הדריש, כאשר התוצאות רשומות משמאל לימין).

- (א) $\frac{1}{24}$
 (ב) $\frac{1}{9!}$
 (ג) $\frac{4!}{9!}$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- $\frac{1}{4!}$ ז'ח'ם אל'ם מ'ת'ק'ם ו'ל' (ה'ס'כ'ז'ים)
 'ה'א'פ'ר'ים מ'ל' מ'ק'ז'ע'ת (ה'א'פ'ר'ים)

6. ההסתברות שהכדור השישי שאלברט הוציא קטן מכל קודמיו היא:

- (א) $\frac{7}{36}$
 (ב) $\frac{5}{9}$
 (ג) $\frac{2}{3}$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.

7. שונות מספר הכדורים שיצאו לפני הכדור עם הספרה 9 היא:

- (א) 5
 (ב) $\frac{16}{3}$
 (ג) $\frac{20}{3}$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- מ'קומו של 9 מתפלג $U[1,9]$. לכן מספר
 המספרים של 9 מתפלג $U[0,8]$ וסוגלו
 פטל

$$\frac{(8-0+1)^2-1}{12}$$

8. תוחלת סכום הספרות שיצאו לפני שיצא כדור מספר 9 היא:

- (א) 18
 (ב) 20
 (ג) 25
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- לכל מספר יש גל' של $\frac{1}{2}$ עברו לפני
 9, לכן התוחלת פטל

$$\frac{1+2+3+\dots+8}{2}$$

9. יהי X סכום ספרות הכדורים שיצאו לפני שיצא כדור מספר 9 ויהי Y סכום ספרות הכדורים שיצאו אחרי שיצא כדור מספר 9. מקדם המתאם של המשתנים המקריים X ו- Y היא:

- (א) $\rho(X, Y) \leq -\frac{1}{2}$
 (ב) $-\frac{1}{2} < \rho(X, Y) \leq 0$
 (ג) $0 < \rho(X, Y) \leq \frac{1}{2}$
 (ד) $-\frac{1}{2} < \rho(X, Y)$
- כל עברה יוצאת לפני או אחרי
 9, לכן יש קשר אינלי יורד
 והמתאם פטל -1

סוגייה שנייה

האוקיינוס האטלנטי הוא אוקיינוס סוער. אורך כל סערה (בימים) מפולג גיאומטרית עם פרמטר $1-q$. סערה נקראת ארוכה אם היא נמשכת לפחות ארבעה ימים. בין כל שתי סערות עוקבות ישנם ימים שקטים (נטולי סערה). התקופה בין שתי סערות עוקבות נקראת תקופה שקטה. אורך כל תקופה שקטה (בימים) מפולג גיאומטרי עם פרמטר $1-p$. במילים אחרות, אם יום t הוא יום סוער, אז ההסתברות שיום $t+1$ הוא יום סוער היא q , ואם יום t הוא יום שקט, אז ההסתברות שיום $t+1$ הוא יום שקט היא p .

יום שבת, 28 במאי 1588, הוא יום שקט. יהי C משתנה מקרה ברנולי השווה 1 אם יום ראשון, 29 במאי 1588, הוא יום שקט, ו-0 אם יום זה הוא יום סוער. יהי D משתנה מקרה ברנולי השווה 1 אם יום שני, 30 במאי 1588, הוא יום שקט, ו-0 אם יום זה הוא יום סוער.

10. ההסתברות $P(D=1)$ היא:

- (א) p
 (ב) $(1-p)^2 + (1-q)^2$
 (ג) $p^2 + (1-p)(1-q)$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- מ"מ"ם רצוף ישתנה מציט האורך
 אלו ע'מ'ים רצוף רגלו על ישתנה.

11. השונות המשותפת של C ו- D היא

- (א) $Cov(C, D) = P(C=1, D=1) - P(C=1) \cdot P(D=1)$
 (ב) $p^2 - p(p^2 + (1-p)(1-q))$
 (ג) $p(1-p) - p(p(1-p) - q(1-q))$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- $P(C=1, D=1) = p^2$ כאשר

12. ההסתברות המותנית ש- $C=1$ בהינתן ש- $D=1$ היא:

- (א) $\frac{p}{p+q}$
 (ב) $\frac{p^2}{p^2+(1-p)q}$
 (ג) $\frac{p^2}{p^2+(1-p)(1-q)}$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- מקור
- $\frac{P(C=1, D=1)}{P(D=1)}$

13. היום, יום שלישי 21.2.2012, מודיע החזאי שההסתברות שמחר, יום רביעי, יהיה יום סוער היא 0.6 (וההסתברות שיהיה יום שקט היא 0.4). בהינתן תחזית זו, ההסתברות שמחרתיים, יום חמישי 23.2.2012 יהיה יום סוער היא:

א) q
 ב) $0.6q + 0.4(1-p)$
 ג) $0.6(q^2 + (1-q)(1-p)) + 0.4(p(1-p) + (1-p)q)$
 ד) אף תשובה אינה נכונה.

כאן יבנה סוער או רגוע? יבנה רגוע או סוער?
 ב) התישור בטל על
 ג) הסתברות שלמה

בתאריך 28 במאי 1588 החל הדוכס סידונה למדוד את אורך התקופות השקטות (מספר הימים בין סערות עוקבות) ואת אורך הסערות. נסמן ב- S_k את אורך התקופה השקטה ה- k אחרי 28 במאי 1588 וב- T_k את אורך הסערה ה- k שהתרחשה אחרי 28 במאי 1588. כלומר, S_1 הוא מספר הימים אחרי 28 במאי 1588 (כולל) עד תחילת הסערה הראשונה, T_1 הוא מספר הימים שאורכת הסערה הראשונה שהחלה אחרי 28 במאי 1588, S_2 הוא מספר הימים השקטים בין הסערה הראשונה לשנייה וכו'.

14. ההסתברות המותנית $P(T_1 = 1 | T_1 \leq 4)$ היא

א) $1 - q$
 ב) $q^3(1 - q)$
 ג) $\frac{1-q}{1-q^4}$
 ד) אף תשובה אינה נכונה.

$P(T_1 = 1 | T_1 \leq 4) = \frac{P(T_1 = 1, T_1 \leq 4)}{P(T_1 \leq 4)}$
 $= \frac{P(T_1 = 1)}{P(T_1 \leq 4)}$
 $= \frac{P(T_1 = 1)}{1 - P(T_1 > 4)}$

15. מה היא תוחלת מספר הסערות הארוכות מבין 100 הסערות הראשונות?

א) $100q^3$
 ב) $100q^4$
 ג) $100q^4(1 - q)$
 ד) אף תשובה אינה נכונה.

כל סערה כשאת בטל אלוה גסכוני
 ג' תחלת סערה בטל אלוה גסכוני
 ד) אף תשובה אינה נכונה.

16. ההסתברות $P(S_2 = T_2)$ היא:

א) $\frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}$
 ב) $\frac{(1-p)(1-q)}{pq(1-pq)}$
 ג) $\frac{(1-q)^2}{q^2(1-q^2)}$

$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p) \cdot p^{k-1} (1-q) \cdot q^{k-1} =$
 $= \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}$
 6
 (פיכוס אור גאומטרי)

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

17. ההסתברות $P(T_1 < T_2)$ היא:

(א) $\frac{1}{2}$

(ב) $\frac{p}{1+p}$

(ג) $\frac{(1-p)(1-q)}{p^2(1-p^2)}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

18. ההתפלגות של $T_1 + T_2$ היא:

(א) גיאומטרית.

(ב) בינומית שלילית לכל ערכים של p ו- q .

(ג) בינומית שלילית רק אם $p = q$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

19. ההתפלגות של $S_2 + T_2$ היא:

(א) בינומית שלילית רק אם $p = q$.

(ב) בינומית שלילית לכל ערכים של p ו- q .

(ג) גיאומטרית.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

20. לצורך שאלה זו בלבד הנח כי $q = 0.8$. לפי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות P שמבין 100 הסערות הראשונות לפחות 45 תהיינה סערות ארוכות היא:

(א) $P < 0.3$

(ב) $0.3 \leq P < 0.5$

(ג) $0.5 \leq P < 0.6$

(ד) $0.6 \leq P$

לפי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות שיהיו ארוכות יותר מ-45 היא 0.8^3 .

לכן יתוארת מספר הסערות הארוכות והיא $100 \cdot 0.8^3$.

מ-200 היא $100 \cdot 0.8^3 (1 - 0.8^3)$.

$\mu \approx 51.2$

$\sigma \approx \sqrt{24.98}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(T_1 = k) \cdot P(T_2 > k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-q) \cdot q^{k-1} \cdot q^k = \frac{q(1-q)}{1-q^2}$$

$$= \frac{q}{1+q}$$

כנסים של שני משתנים גאומטריים של אותו פרמטר ז"ל.

אם $p \neq q$ אז שני גאומטריים של אותו פרמטר.