

סמסטר קיץ, מועד א'  
תאריך: 20.9.2007  
משך הבחינה: 3 וחצי שעות

**בחינה בקורס: מבוא להסתברות**

מרצה: ד"ר אמיר בק

הנחיות:

- נא לקרוא את כל המבחן בהתחלה.
- **חומר עזר מותר בשימוש: שני דפי נוסחאות ומחשבון.**
- בבחינה 4 שאלות, עליכם לענות על כולן.
- משקל כל שאלה רשום לידה, משקלם של סעיפים שונים באותה השאלה אינו בהכרח שווה. סך הניקוד בבחינה – 100 נקודות.
- את הפתרונות יש לנמק היטב. פתרונות לא מנומקים לא יזכו במלוא הנקודות.

*בהצלחה!*

### שאלה 1 (25 נקודות)

אורך חיי פרפר (בימים) הוא מ"מ רציף  $X$  בעל פונקציה הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

א. חשבו את  $a, b$  כאשר ידוע כי  $E(X)=1$ .

ב. מיצאו את פונקציה ההתפלגות המצטברת של  $X$ .

בחוות פרפרים 1000 פרפרים שיצאו זה הרגע מן הגולם.

ג. מיצאו חסם להסתברות שלפחות 220 פרפרים ימותו ביום הראשון בעזרת אי שוויון מרקוב.

ד. מיצאו חסם להסתברות שלפחות 220 פרפרים ימותו ביום הראשון בעזרת אי שוויון צ'בישב.

ה. מיצאו בעזרת הקרוב הנורמלי (עם תיקון רציפות) הערכה להסתברות שלפחות 220 פרפרים ימותו ביום הראשון.

### שאלה 2 (27 נקודות)

מסדרים 5 אנשים בשורה באקראי. בין חמשת אנשים יש את המפטי ודמפטי. נסמן:

$X$  – מספר האנשים משמאל לשמאלי מבין המפטי ודמפטי.

$Y$  – מספר האנשים מימין לימני מבין המפטי ודמפטי.

א. מיצאו את פונקציה התפלגות משותפת של  $(X, Y)$ .

ב. חשבו את מקדם המתאם  $\rho(X, Y)$ .

ג. מיצאו את ההתפלגות המותנה של  $X$  בהינתן ש  $X + Y = 3$ .

ד. מהו ישר התחזית הלינארי האופטימלי של  $Y$  לפי  $X$ ?

ה. חשבו  $E(X^2 + 3X | X = 2)$ .

### שאלה 3 (27 נקודות)

12 נכדיה של סבתא יוכבד מתיישבים בארבעה ספסלים שבכל אחד מהם מקום לשלושה ילדים בדיוק. ברשות סבתא יוכבד 6 סוכריות טופי ורודות ו6 סוכריות טופי ירוקות. סבתא יוכבד מחלקת באופן מקרי את 12 הסוכריות ל-12 הנכדים כך שכל נכד מקבל בדיוק סוכרייה אחת.

א. ספסל נקרא "הומוגני" אם כל הילדים שבו קבלו את אותו צבע של סוכרייה. מהי ההסתברות שכל הספסלים הומוגנים?

ב. מהי ההסתברות שאין אפילו ספסל אחד הומוגני?

ג. נכד נקרא "מרוצה" אם יש לפחות נכד אחד אחר בספסל שלו שקיבל את אותו צבע של סוכרייה. יהי  $X$  – מספר הנכדים המרוצים. חשבו  $E(X)$ .

### שאלה 4 (21 נקודות)

בקורס "הסתברות מתקדמת" יש 100 תלמידים. ידוע כי מספר התלמידים שעוברים את הקורס מתפלג  $U[90,100]$ . כל התלמידים שעוברים את הקורס "הסתברות מתקדמת" ממשיכים לקורס "הסתברות מתקדמת ממש". ידוע כי בקורס "הסתברות מתקדמת ממש" כל תלמיד עובר בהסתברות 0.9 באופן בלתי תלוי בשאר התלמידים.

נגדיר:

$X$  – מספר התלמידים שעברו את הקורס "הסתברות מתקדמת ממש"

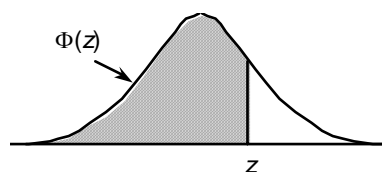
$Y$  – מספר התלמידים שעברו את הקורס "הסתברות מתקדמת"

א. מהי ההסתברות שלפחות 99 אנשים עברו את הקורס "הסתברות מתקדמת ממש"?

ב. חשבו  $E(X)$

ג. חשבו  $V(X)$ .

**טבלה 1.** טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$



**אוניברסיטת ת"א**

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995