פתרון הבחינה של פרופ' סולן מ 20/6/06

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
תשובה	ד	א	ב	ב	ב	ד	א	ד	ג	ג	ב	ב

שאלה	13	14	15	16	17	18	19
תשובה	ד	ב	ג	ב	ד	ד	ד

הסברים לפתרונות

שאלה 1

לאשר יש שני שכנים מתוך חמישה אפשריים. צריך שבתיה תהיה אחת מהן ולכך יש סיכוי $\frac{2}{5}$.

שאלה 2

$$P(X=0)=P(X=1)=\frac{2}{5} \quad , \quad P(X=2)=\frac{1}{5}$$

$$E(X)=\frac{2}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 2=\frac{4}{5}$$

שאלה 3

נתון שגדי הוא שכן של אשר. בתיה היא כעת אחת מארבעה שבין אחד מהם לבין אשר לא מפריד אף אחד, בין שניים מהם לבין אשר מפריד אחד ובין אחד מהם לבין אשר מפרידים שניים.

$$E(X\mid Y=0)=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{2}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2=1$$

שאלה 4

להוד ורד ודינה נותרו שלושה מקומות שבהם הם צריכים להתמקם. בזוג אחד מבין שלושת זוגות המיקומים האפשריים של הוד וורד, הם סמוכים.

שאלה 5

בכל יום שעד אליו הם אף פעם לא התיישבו בסמוך, יש סיכוי של $\frac{2}{5}$ שזה יתרחש לראשונה, זאת באופן בלתי תלוי בימים אחרים.

שאלה 6

לא גיאומטרית כי הסיכוי שזה יקרה לראשונה בפעם הקרובה בהינתן שלא קרה עד כה, אינו קבוע. סיכוי זה עולה משלב לשלב כי גדל הסיכוי שהוד וורד כבר לא משתתפים.
לא בינומי כי בהתפלגות בינומית משתנה מקבל רק ערכים שלא גדולים מהפרמטר n ואילו כאן סיום התהליך יכול להידחות עד כל זמן סופי.
יש הרבה דרכים לראות שגם לא פואסוני. אחת הדרכים היא לפי שמשתנה פואסוני יכול לקבל את הערך אפס, אך כאן $P(Z=0)=0$.

שאלה 7

בכל משחק סיכויו של השחקן לקבל תוצאה זהה לזאת של הדילר הם $\frac{6}{36}$. משיקולי סימטריה בין השחקן

לדילר, סיכויו לקבל יותר מהדילר הם $\frac{15}{36}=\frac{1-\frac{6}{36}}{2}$.

שאלה 8

בסיבוב בודד אם הדילר מקבל את התוצאה k אז ההסתברות שכל השחקנים יקבלו תוצאה שאינה גדולה מתוצאתו היא $\left(\frac{k}{6}\right)^m$. הדילר מקבל בכל סיבוב את כל אחת מהתוצאות שבין 1 ל 6 בסיכוי $\frac{1}{6}$. תוחלת הרווח של הדילר במשחק כולו שווה לסכום תוחלות הרווח שלו בסיבובים השונים.

$$E(Z)=nm\left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^m+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^m+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^m+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^m+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^m+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{6}{6}\right)^m\right]$$

שאלה 9

סכום הרווחים של כולם כולל הדילר הוא תמיד אפס, לכן $0=\left(\sum_{i=1}^{m}E(Y_i)\right)+E(Z)$. משיקולי סימטריה בין השחקנים (לא כולל הדילר) , נקבל את הפתרון.

שאלה 10

נתחיל באינטואיציה: אם הראשון גובר על הדילר יותר פעמים, זה נותן אינדיקציה מסוימת לתוצאות נמוכות של הדילר ולכן מגדיל את הסיכויים ליותר הצלחות של השני.

$\operatorname{cov}(X_1,X_2)=\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}w_{1,i},\sum_{i=1}^{n}w_{2,i}\right)$ כאשר $w_{1,i}$ ו $w_{2,i}$ הם האינדיקטורים של יתרון של השחקנים 1 ו 2 על הדילר במשחקים השונים. מכיון שתוצאות משחקים שונים הן בלתי תלויות ומכיון שהסיכויים בכל משחק הם זהים אז נקבל ש $\operatorname{cov}(X_1,X_2)=n\cdot\operatorname{cov}(w_{1,1},w_{2,1})$.

$$\mathrm{E}(w_{1,1})=E(w_{1,2})=\frac{15}{36}\quad\Rightarrow\quad E(w_{1,1})\cdot E(w_{1,2})=\frac{225}{6^4}$$

$$\mathrm{E}(w_{1,1}\cdot w_{1,2})=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{3}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]=\frac{55}{216}$$

$$\operatorname{cov}(w_{1,1},w_{1,2})=\frac{55}{216}-\frac{225}{6^4}=\frac{35}{6^4\cdot 2^4}$$

שאלה 11

שחקן הגובר על הדילר יותר פעמים אז גדלים סיכויו לזכות יותר פעמים.

שאלה 12

$$\sqrt{V(X_1)}=\sqrt{\frac{15}{36}\cdot\frac{21}{36}\cdot 1{,}000}\cong 16\quad,\quad E(X_1)=\frac{15}{36}\cdot 1{,}000\cong 416$$

לכן הפתרון הוא בקירוב $1-\phi\left(\frac{449.5-416}{16}\right)$.

שאלה 13

תלויים למשל כי $P(S_2=2 \mid S_1=3)=0 \neq P(S_2=2)$.

שוני התפלגות כי למשל S_1 יכול לקבל את הערך 1 ו S_2 לא יכול לקבל את הערך 1.

שאלה 14

$S_1=2$ משמעותו שהקוביה הראשונה הראתה 2. יש עוד שתי קוביות שביחד עם הראשונה מסתכמות ב S_3 . $E(S_3 \mid S_1=2)=2+2\cdot\frac{1+6}{2}=9$.

שאלה 15

ההסתברות ש B קרה היא שקלול של ההסתברויות המותנות ש B קרה בהינתן ש A קרה ובהינתן ש A^c קרה. אך בהינתן ש A קרה אז בודאי B קרה.

$$P(B)=P(A)\cdot P(B \mid A)+P(A^c)\cdot P(B \mid A^c)=P(A)\cdot 1+(1-P(A))\cdot P(B \mid A^c)$$

ומכיון ש $P(A)>0$ אז לא יתכן ש $P(B \mid A^c)\geq P(B)$.

שאלה 16

נגדיר משתנים $y_i=x_i-3.5$. למשתנים אלה יש תוחלת 0 ושונות זהה לשונות של משתנה $U(1,6)$ שהיא $\frac{35}{12}$. $P(\max_{i\leq 20} \mid y_1+y_2+\cdots+y_{20} \mid \geq 8)\leq\frac{20\cdot\frac{35}{12}}{8^2}$.

הערה: אם מכירים את הניסוח של אי שיוויון קולומגורוב למשתנים שאינם בהכרח בעלי תוחלת אפס, אז ניתן לוותר על הגדרת המשתנים y_i ולעבוד ישירות עם המשתנים X_i .

שאלה 17

S_6 מקבל ערך שהוא בדיוק תוחלתו $6\cdot 3.5=21$. לכן לאחר 6 הטלות אנו למעשה עומדים במצב ההתחלתי ומסתכלים על המשתנים בין 7 ל 20.

$$P(\max_{7\leq i\leq 20} \mid y_7+y_8+\cdots+y_{20} \mid \geq 8)\leq\frac{14\cdot\frac{35}{12}}{8^2}$$

שאלה 18

לא ידועה ההתפלגות המותנה של S_{400} בהינתן שב 400 ההטלות הראשונות לא נפלה הכרעה. כמוכן בהינתן סכום של 400 משתנים יש לנו כאן רק משתנה בודד שהוא ההטלה ה-401. כדי להשתמש במשפט הגבול המרכזי, צריך הרבה יותר משתנים בלתי תלויים.

שאלה 19

נראה ש $X_4+X_5=7$ בלתי אפשרי אך הערכים 12 ו 8 אפשריים.

אם $X_4+X_5=7$ אז ההפרש אחרי 5 הטלות שווה להפרש לאחר 3 הטלות ואם היה הפרש מספק לאחר 5 הטלות אז היה כבר לאחר 3 הטלות.

נראה שיתכן ש $X_4+X_5=12$ והוא ימכר לאחר ההטלה החמישית. דוגמא: אם $X_1=X_2=X_3=5$ ו $X_4=X_5=6$ אז $X_4+X_5=12$ והוא ימכר לאחר ההטלה החמישית.

נראה שיתכן ש $X_4+X_5=8$ והוא ימכר לאחר ההטלה החמישית. דוגמא: $X_1=X_2=X_3=X_5=6$ ו $X_4=2$ אז $X_4+X_5=8$ והוא ימכר לאחר ההטלה החמישית.

הערה: תוכלו להיוכח שכל ערך חוץ מ 7 הוא אפשרי.

שלומי