

מספר מחברת: _____

מספר ת.ז.: _____

בחינה בקורס מבוא להסתברות שנת תשסו, סמסטר ב', מועד א' מרצה: אילון סולן

תאריך הבחינה: 20.6.2006.

מספר הקורס: 1102 – 0365.

זמן הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום אישי, ומחשב כיס.

השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה. סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X		X	
		X				X	X	
			X		X		X	
				X		X	X	
	0	-2	6	-2	-2	-4	4	0

דוגמא:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.

לשימושך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!!

	1	2	3	4	5	6
א						
ב						
ג						
ד						

	7	8	9	10	11	12
א						
ב						
ג						
ד						

	13	14	15	16	17	18	19
א							
ב							
ג							
ד							

סוגיה ראשונה

אשר, בתיה, גדי, דינה, הוד וורד יושבים במעגל בסדר מקרי. נסמן:
 $X =$ מספר האנשים המפרידים בין אשר ובתיה (הצד הקצר).
 $Y =$ מספר האנשים המפרידים בין אשר וגדי (הצד הקצר).

1. ההסתברות $P(X = 0)$ היא:

(א) $1/6$.

(ב) $1/5$.

(ג) $1/4$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

2. התוחלת $E[X]$:

(א) קטנה מ-1.

(ב) שווה 1.

(ג) בין 1 ל-2.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

3. התוחלת $E[X | Y = 0]$:

(א) קטנה מ-1.

(ב) שווה 1.

(ג) בין 1 ל-2.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

4. ההסתברות המותנה שהוד יושב ליד ורד אם ידוע כי $X = 1$ ו- $Y = 2$, היא:

(א) 0.

(ב) $1/3$.

(ג) $2/3$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

5. בכל יום ששת החברים מתיישבים במעגל בסדר מקרי, באופן בלתי תלוי בסדר הישיבה בימים הקודמים. נסמן: Z = היום הראשון בו אשר ובתיה מתיישבים אחד ליד השניה. ההתפלגות של Z הינה:

(א) בינומית.

(ב) גיאומטרית.

(ג) פואסונית.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

6. בכל יום ששת החברים מתיישבים במעגל בסדר מקרי, באופן בלתי תלוי בסדר הישיבה בימים הקודמים. כאשר הוד וורד מתיישבים אחד ליד השני הם מסתלקים, אך ארבעת החברים הנותרים ממשיכים כל יום להתיישב באופן מקרי במעגל. נסמן: Z = היום הראשון בו אשר ובתיה מתיישבים אחד ליד השניה. ההתפלגות של Z הינה:

(א) בינומית.

(ב) גיאומטרית.

(ג) פואסונית.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגיה שנייה

במשחק מזל בקזינו משתתפים m שחקנים ונציג של הקזינו (שייקרא "דילר"). בכל סיבוב, משלם כל שחקן שקל אחד ומטיל קוביה הוגנת. גם הדילר מטיל קוביה הוגנת. m השקלים ששילמו השחקנים מחולקים שווה בשווה בין כל השחקנים שקיבלו תוצאה גבוהה ממש מהדילר. אם אין אף שחקן כזה, הדילר מקבל את כל m השקלים. המשחק נמשך n סיבובים.

נגדיר את המשתנים המקריים הבאים:

$X_i =$ מספר הסיבובים בהם שחקן i קיבל תוצאה גבוהה מהדילר ($i = 1, 2, \dots, m$).
 $Y_i =$ הרווח הנקי של שחקן i במשחק כולו ($i = 1, 2, \dots, m$). הרווח שלילי אם השחקן הפסיד.

$Z =$ הרווח הכולל של הדילר במשחק כולו.

7. ההתפלגות של X_1 היא:

(א) $X_1 \sim B(n, \frac{15}{36})$

(ב) $X_1 \sim B(n, \frac{1}{m})$

(ג) $X_1 \sim U(0, 1, \dots, n)$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

8. התוחלת $E[Z]$ שווה ל:

(א) $n \cdot \frac{15}{36}$

(ב) $\frac{n}{m+1} \left(\frac{21}{36}\right)^n$

(ג) $mn \left(\frac{21}{36}\right)^n$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

9. התוחלת $E[Y_1]$ שווה ל:

(א) $E[Z]$

(ב) $-\frac{n}{m} E[Z]$

(ג) $-\frac{1}{m} E[Z]$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

10. השונות המשותפת $\text{cov}(X_1, X_2)$ שווה ל:

א) X_1 ו- X_2 בלתי תלויים, ולכן $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$.

ב) X_1 ו- X_2 אינם בלתי תלויים, אך הם בלתי מתואמים: $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$.

ג) $\text{cov}(X_1, X_2) = \frac{5 \cdot 7 \cdot n}{3^3 \cdot 2^4}$.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

11. מקדם המתאם $\rho(X_1, Y_1)$ הינו:

א) 0 - המשתנים המקרים האלה בלתי מתואמים.

ב) חיובי.

ג) שלילי.

ד) התשובה תלויה ב- m וב- n .

12. עבור $n = 1000$ ההסתברות $P(X_1 \geq 450)$ היא בערך (על פי הקירוב הנורמלי):

א) 0.055.

ב) 0.016.

ג) 0.115.

ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגיה שלישית

יוסף מטיל קוביה הוגנת שוב ושוב. נסמן ב- X_n את תוצאת ההטלה ה- n , וב- $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ את סכום התוצאות ב- n ההטלות הראשונות. לאחר כל הטלה מדווח יוסף ליהודה מהו S_n . כדי לבדוק אם יוסף אינו ממציא תוצאות, מחשב יהודה לאחר כל הטלה את ההפרש בין S_n ותוחלתו: $|S_n - 3\frac{1}{2} \cdot n|$. ברגע שהערך המוחלט של ההפרש גדול מ-8 יהודה מוכר את יוסף לישמעאלים.

נגדיר את המאורעות הבאים:

$A =$ יוסף נמכר לישמעאלים בהטלה החמישית.

$B =$ יוסף נמכר לישמעאלים לאחר לכל היותר 20 הטלות.

13. המשתנים המקריים S_1 ו- S_2 הם:

(א) בלתי תלויים ושווי התפלגות.

(ב) תלויים ושווי התפלגות.

(ג) בלתי תלויים ושוני התפלגות.

(ד) תלויים ושוני התפלגות.

14. התוחלת המותנה $E[S_3 | S_1 = 2]$ היא:

(א) קטנה מ-9.

(ב) 9.

(ג) $10\frac{1}{2}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

15. מהו היחס בין $P(B)$ ו- $P(B | A^c)$:

(א) $P(B) = P(B | A^c)$

(ב) $P(B) < P(B | A^c)$

(ג) $P(B) > P(B | A^c)$

(ד) נתוני הסוגיה אינם מספיקים כדי לענות על השאלה.

16. לפי אי-שוויון קולמוגורוב, ההסתברות $P(B)$ קטנה או שווה ל:

(א) $\frac{1}{64}$

(ב) $\frac{700}{12 \cdot 64}$

(ג) אי-שוויון קולמוגורוב אינו מתאים לשימוש לחישוב ההסתברות המבוקשת.

(ד) אי-שוויון קולמוגורוב מתאים לשימוש לחישוב ההסתברות המבוקשת, אך החסם שהוא נותן שונה מאשר החסמים ב-(א) וב-(ב).

17. ידוע כי יוסף לא נמכר עד הסיבוב הששי, והוא מדווח כי $S_6 = 21$. לפי אי-שוויון קולמוגורוב, ההסתברות $P(B | S_6 = 21)$ קטנה או שווה ל:

(א) $\frac{14}{20} \cdot \frac{1}{64}$

(ב) $\frac{500}{12 \cdot 64}$

(ג) אי-שוויון קולמוגורוב אינו מתאים לשימוש לחישוב ההסתברות המבוקשת.

(ד) אי-שוויון קולמוגורוב מתאים לשימוש לחישוב ההסתברות המבוקשת, אך החסם שהוא נותן שונה מאשר החסמים ב-(א) וב-(ב).

18. ידוע כי יוסף לא נמכר עד הסיבוב ה-400, הסיכוי שהוא יימכר בסיבוב ה-401 ניתן להערכה על ידי:

(א) אי-שוויון צ'ביצ'ב.

(ב) משפט הגבול המרכזי.

(ג) אי-שוויון קולמוגורוב.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

19. ידוע שיוסף נמכר בהטלה החמישית. אילו מהתוצאות ניתן לומר בוודאות ש- $X_4 + X_5$ אינו מקבל (מבין המספרים 2, 3, 4, ..., 12):

(א) 2, 12

(ב) 6, 7, 8

(ג) $X_4 + X_5$ יכול לקבל כל ערך.

(ד) ישנם ערכים ש- $X_4 + X_5$ אינו מקבל, אך תשובות (א) ו-(ב) אינן נכונות.

סוג	$P(X = x)$	$E(X)$	$Var(X)$
$X \sim B(n, p), 0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$	np	$np(1-p)$
$X \sim P(\lambda), \lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ
$X \sim G(p), 0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X \sim U(1, 2, \dots, n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$	

טבלה 1: מספר התפלגויות

רשימת נוסחאות

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X | Y]]$$

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[\mathbf{Var}(X | Y)] + \mathbf{Var}(\mathbf{E}[X | Y])$$