

בחינה ב"מבוא להסתברות"  
המורה: פרופ' יצחק מלכסון

משך הבחינה שלוש שעות.  
מותר להשתמש בחומר עזר כתוב, ב-2-3 דפי סיכומים מודפסים ובמחשבון.  
ענה על כל השאלות. אם צברת  $S$  נקודות, ציוןך  $\min(S, 100)$ .

ב ה צ ל ח ה !!!

**שאלה 1.** בהגרלת הלוטו השבועית שבמיקרונוזיה מגרילים באקראי את ה"שישייה המנצחת" - 6 מספרים (ללא החזרה) מתוך 45 המספרים מ-1 עד 45, הנקראים במיקרונוזית "סימנים". על מנת להשתתף בהגרלה יש למלא טופס ובו 6 סימנים שונים מן הרשימה הנ"ל. באותה הגרלה משתתפים שלושה חברים במשלחת ההסברה של מדינה רחוקה - רחל, משה וגלעד. משה מנחש שישייה באקראי, גלעד ממלא 1,2,3,4,5,6 ורחל ממלאת 7,8,9,10,11,12.

- א. (8 נק') יהי  $X$  מספר הסימנים בשישייה המנצחת שניחש משה. מצאו את התפלגות  $X$  ואת  $E(X)$ .
- ב. (2 נק') כנ"ל לגבי רחל.
- ג. (10 נק') יהי  $Y$  מספר האנשים מבין השלושה שנחשו בדיוק 4 סימנים נכונים. חשבו  $E(Y)$ ,  $VAR(Y)$ .

**שאלה 2.** לסבתא יוכבד שני נכדים, ליאת ועילי. במקרה של סבתא יוכבד 7 פרות: 3 אגסים, 2 תפוחים ו-2 בננות. סבתא יוכבד מחלקת בצורה אקראית לשני נכדיה 4 פרות, 2 פרות לכל אחד.

- א. (4 נק') תארו מרחב הסתברות מתאים.
- ב. (5 נק') מה הסיכוי שעילי קיבל שני פרות מאותו סוג?
- ג. (5 נק') מה הסיכוי שליאת ועילי קיבלו כל אחד שני פרות מאותו סוג?
- ד. (5 נק') מה הסיכוי שליאת ועילי קיבלו כל אחד שני פרות מסוגים שונים?
- ה. (5 נק') מה הסיכוי שנשארה לפחות בננה אחת במקרה לאחר חלוקת הפירות?

**שאלה 3.** מטבע הוגן מוטל באופן בלתי תלוי עד אשר מתקבל לראשונה רצף של שני "עצים" או 4 הטלות, המוקדם שבין השניים. יהי  $X$  מספר ההטלות ו- $Y$  מספר הפעמים שיצא "עץ".

- א. (8 נק') רשמו התפלגות משותפת של  $(X, Y)$ , כולל התפלגויות שוליות.
- ב. (8 נק') חשבו את מקדם המתאם בין  $X$  ו- $Y$ .
- ג. (8 נק') יהי  $Z$  מספר הפעמים שיצא "פלי" במהלך ההטלות. חשבו  $COV(X, Z)$ .

שאלה 4. תנו דוגמא מנומקת ל-

- א. (6 נק') התפלגות לה אין חציון יחיד.
- ב. (6 נק') התפלגות בה התוחלת אינה חציון.
- ג. (6 נק') התפלגות בה אי-שוויון צ'בישב הוא שוויון עבור קבוע  $a$  השווה ל-3 סטיות תקן.  $(P(|X-E(X)| \geq a) \leq \text{VAR}(X)/a^2)$ .
- ד. (6 נק') התפלגות משותפת של שני מ"מ עם מקדם מתאם 0.9-.

שאלה 5. מטבע הנופל על "עץ" בהסתברות חיובית  $p$  מוטל באופן בלתי תלוי עד אשר התקבלו  $n$  פעמים "עץ". יהי  $X$  מספר ההטלות.

- א. (5 נק') מה התפלגות  $X$ , תוחלתה ושונותה?
- ב. (8 נק') עבור  $p = 0.3$  ו- $n = 630$ , תנו קירוב פשוט וטוב להסתברות לכך ש- $X = 2107$  ולזו ש- $X$  עולה על 2030. יש לנמק את השיטה תוך ניסוח משפט הקירוב המתאים.
- ג. (8 נק') עבור  $p = 10^{-4}$  ו- $n = 5$ , תנו קירוב פשוט וטוב להסתברות לכך ש- $X = 60001$ . יש לנמק את השיטה תוך ניסוח משפט הקירוב המתאים.