

ת"ז התלמיד _____

מס' סידורי _____

סמסטר א' מועד ב' תשס"ד
תאריך הבחינה: 19.3.2004

בחינה במבוא להסתברות
המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' יצחק מלכסון

- משך הבחינה: שלוש שעות
- מותר להשתמש בסיכום אישי בהיקף של עד 2 דפים ובמחשב כיס
- השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. ענה על כולן
- לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה (במקום המתאים בגוף השאלון ובטבלה שבתחתית עמוד זה) מזכה ב-6 נקודות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.
- הצובר N נקודות יקבל את הציון $\min(100, \max(N, 0))$.

בהצלחה!

סוגיה I

	1	2	3	4	5	6	7
א							
ב							
ג							
ד							

סוגיה II

	8	9	10	11	12
א					
ב					
ג					
ד					

סוגיה III

	13	14	15	16	17	18
א						
ב						
ג						
ד						

סוגיה 1

נסתכל ב- 10^n המילים באורך n שאפשר לכתוב באמצעות הספרות $0, 1, \dots, 9$.

1. עבור $n = 9$, יהי a מספר אותן מילים הכתובות באמצעות חמש מן הספרות, שאחת מהן מופיעה פעם אחת וכל אחת מארבע האחרות פעמיים.
עבור $n = 10$, יהי b מספר אותן מילים הכתובות באמצעות חמש מן הספרות, שכל אחת מהן מופיעה פעמיים.

(א) $a < b$ (ב) לא ניתן להכריע (ג) $a = b$ (ד) $a > b$

אחת מ- 10^n המילים הנייל נבחרת באופן מקרי. יהי X_i ($i = 0, 1, \dots, 9$) מספר הפעמים שבו מופיעה הספרה i במילה שנבחרה.

2. בהנחה $n \geq 3$, ההסתברות $P(X_1 = 1, X_2 = 2)$ היא:

$$\begin{array}{ll} \text{(א)} & \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 10^3} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-3} \\ \text{(ב)} & n \binom{n}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^{2n-3} \\ \text{(ג)} & P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) \\ \text{(ד)} & \text{אף אחת מהנייל.} \end{array}$$

3. ההתפלגות של $X_1 + X_2$ היא:

$$\text{(א)} \quad B\left(2n, \frac{1}{10}\right) \quad \text{(ב)} \quad B\left(n, \frac{1}{10}\right) \quad \text{(ג)} \quad B\left(n, \frac{1}{5}\right) \quad \text{(ד)} \quad \text{אינה בינומית.}$$

4. השונות של $X_1 + X_2$ היא:

$$\text{(א)} \quad \frac{9n}{50} \quad \text{(ב)} \quad \frac{4n}{25} \quad \text{(ג)} \quad \frac{9n}{100} \quad \text{(ד)} \quad \text{אף אחת מהנייל.}$$

5. מקדם המתאם $\rho(X_1, X_2)$ הוא:

$$\begin{array}{ll} \text{(א)} & \text{פונקציה לינארית של } 1/n \\ \text{(ב)} & \text{פונקציה ריבועית של } 1/n \\ \text{(ג)} & \text{לא תלוי כלל ב- } n \\ \text{(ד)} & \text{אף אחת מהנייל.} \end{array}$$

יהי Y מספר הספרות השונות המופיעות במילה שנבחרה.

6. התוחלת $E(Y)$:

$$10 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right) \quad (\text{ד}) \quad n \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^{10} \right) \quad (\text{ג}) \quad \frac{9^n}{10^{n-1}} \quad (\text{ב}) \quad n \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right) \quad (\text{א})$$

במקום לבחור מילה בעלת אורך קבוע n , בוחרים את המילה ספרה אחרי ספרה, עם חזרות, עד אשר לראשונה כל 10 הספרות השונות מופיעות. יהי N אורך המילה שהתקבלה.

7. התוחלת $E(N)$ היא :

$$10 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} \right) \quad (\text{ב}) \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} \quad (\text{א})$$

$$9 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} \right) \quad (\text{ג}) \quad \text{אף אחת מהנ"ל.} \quad (\text{ד})$$

סוגיה II

קופסא מכילה עשרה מטבעות שווי צורה, תשעה מן המטבעות הוגנים ואחד מוטה, הנופל על

$$H \text{ בסיכוי } \frac{2}{3}.$$

בוחרים באקראי באחד המטבעות ומבצעים n הטלות בלתי תלויות של המטבע הנבחר.

8. עבור $n = 3$, הסיכוי לקבל בדיוק H אחד הוא:

$$(א) \frac{392}{1125} \quad (ב) \frac{31}{90} \quad (ג) \frac{259}{720} \quad (ד) \frac{3}{8}$$

9. נתון שבשלוש ההטלות הראשונות התקבל H אחד בדיוק. הסיכוי (המותנה) שנבחר המטבע המוטה הוא:

$$(א) \frac{16}{259} \quad (ב) \frac{203}{392} \quad (ג) \frac{27}{31} \quad (ד) \frac{4}{31}$$

10. נתון שבשלוש ההטלות הראשונות התקבל H אחד בדיוק. הסיכוי (המותנה) שהתקבל H בהטלה השנייה הוא:

$$(א) \frac{1}{3} \quad (ב) \frac{8}{15} \quad (ג) \frac{97}{186} \quad (ד) \frac{31}{270}$$

11. השונות של מספר ה- H ים ב- n ההטלות הראשונות היא:

$$(א) \frac{56n}{225} \quad (ב) \frac{n}{45} \left(11 + \frac{n}{5} \right) \quad (ג) \frac{11n}{45} \quad (ד) \text{אף אחד מהני"ל.}$$

12. נתון שבשלוש ההטלות הראשונות התקבל H אחד בדיוק. הסיכוי (המותנה) שיתקבל H בהטלה הרביעית הוא:

$$(א) \frac{793}{1554} \quad (ב) \frac{31}{270} \quad (ג) \frac{1}{3} \quad (ד) \text{אף אחת מהני"ל.}$$

סוגיה III

מבחן מורכב מ-27 שאלות. לכל שאלה יש 4 תשובות, מהן אחת נכונה. בחירה נכונה מזכה ב-3 נקודות ובחירה שגויה מורידה נקודה. על הנבחן לבחור אחת בלבד מ-4 התשובות. ראובן בוחר באקראי תשובה מתוך 4 לכל שאלה, באופן בלתי תלוי בין השאלות השונות. יהי X סכום הנקודות שבו זכה ראובן.

13. שונות X היא:

- (א) $(9/4)^2$ (ב) 17 ג. גדולה מ-84 ד. אף אחת מהנ"ל.

14. בעזרת אי-שוויון צ'ביצ'ב אפשר להראות שהסתברות של המאורע $[|X| \geq 18]$

- (א) גדולה או שווה ל- $1/16$ (ב) קטנה או שווה ל- $1/4$
 (ג) קטנה או שווה ל- $1/10$ (ד) אף אחת מהנ"ל.

15. בעזרת קרוב נורמלי אפשר לקבל הערכה להסתברות המאורע $[X \geq 18]$

- (א) פחות מאשר 0.0001
 (ב) יותר מאשר 0.1
 (ג) בערך 0.025
 (ד) בערך 0.05

16. לשמעון יש הסתברות $1/2$ לבחור את התשובה נכונה, וזאת באופן בלתי תלוי בין השאלות. יהי Y מספר הנקודות ששמעון מקבל. הסתברות המאורע $[Y \leq 18]$ לפי קרוב נורמלי

- (א) קטנה מ- $1/2$
 (ב) כ- 0.902
 (ג) כ- 0.807
 (ד) בין $1/2$ ו- $3/4$

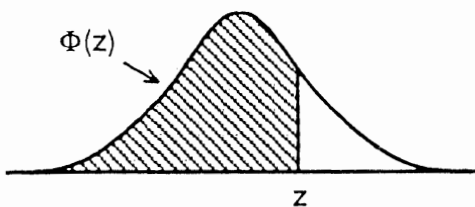
17. בתנאי שאלה 16 מספר הנקודות k הקטן ביותר כך ש- $P(Y \leq k) \geq 0.90$ הוא:

- (א) 25
 (ב) 30
 (ג) 35
 (ד) 40

18. לאה יודעת לענות נכון על 18 מן השאלות ואלו בתשע האחרות היא יודעת להוריד מן הפרק אחת מארבע האפשרויות כך שהיא מנחשת באקראי אחת מתוך שלוש. התוחלת והשונות של הציון, Z , של לאה הן:

- (א) $E(Z) = 58.5, \quad Var(Z) = 32$
 (ב) $E(Z) = 58.5, \quad Var(Z) = 2$
 (ג) $E(Z) = 57, \quad Var(Z) = 32$
 (ד) $E(Z) = 57, \quad Var(Z) = 2$

נספח 1 טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995