פתרון הבחינה של פרופ' מלכסון מ 18/2/90

שאלה: n אנשים, ביניהם חיה ויואב, שאינם מכירים זה את זה, מסודרים במעגל. המעגל נחתך בשני מקומות אקראיים וכך נוצרים שני מעגלים חדשים.

א. חשב את ההסתברות שחיה ויואב נמצאים באותו מעגל חדש. נסח הנחותיך.

ב. חשב את תוחלת מספר האנשים במעגל שמכיל את חיה. מהו שעור האנשים האלה מתוך כלל n האנשים עבור n גדול?

ג. חשב את תוחלת מספר האנשים במעגל באורך 'המכסימלי'. מהו שעור האנשים האלה מתוך כלל n האנשים עבור n גדול?

פתרון: א. נניח שבמעגל יש לפחות 4 אנשים ושבכל מעגל שנוצר יש לפחות 2.
יש $n(n-3)/2$ אפשרויות לבחור מחיצות. יואב נמצא במרחק X מימין לחיה כאשר $X\sim U(1,n-1)$. אם יואב נמצא במרחק k מימין לחיה אז בגלל שבכל מעגל יהיו לפחות 2 אז מספר האפשרויות שהם יופרדו הוא $k(n-k)-2$

$$p=1-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)-2}{n(n-3)/2}=\cdots$$

לצורך סכום הטור $\sum k^2$ ניתן להעזר בזהות $\sum_{k=2}^{t}\binom{k}{2}=\binom{t+1}{2+1}$

ב. חיה בוודאי תהיה במעגל שמכיל אותה. כל אחד מהאחרים יהיה במעגל שמכיל אותה בהסתברות p. לכן התוחלת היא $p\cdot(n-1)+1$.
כאשר $n\to\infty$ תשאף הפרופורציה הממוצעת של מספר האנשים שבמעגל של חיה ל $\frac{2}{3}$.

ג. X – מספר האנשים במעגל המכסימלי.

עבור n זוגי: $P(X\geq k)=1$ עבור $k\leq\frac{n}{2}$, $P(X\geq\frac{n}{2}+1)=\frac{n-4}{n-3}$

$P(X\geq k)=\frac{n-4-2(k-n/2-1)}{n-3}$ עבור $n/2+3\leq k\leq n-2$

עבור n אי זוגי: $P(X\geq k)=1$ עבור $k\leq\frac{n+1}{2}$.

$P(X\geq k)=\frac{n-3-2(k-\frac{n+1}{2})}{n-3}$ עבור $\frac{n+1}{2}\leq k\leq n-2$.

בכל אחד מהמקרים $E(X)=\sum_{k=1}^{n-2}P(X\geq k)$, בשני המקרים תשאף הפרופורציה הממוצעת ל $\frac{3}{4}$ כאשר $n\to\infty$. (למעשה ההתפלגות דומה ל $U(n/2,n-2)$)

שלומי

שאלה: (מבחינה של פרופ' מלכסון מ 18/2/90)

| 1 | | 1 2 | | 1 2 2 | | 1 2 2 2 |

אחד מעשרת הכדורים שבתמונה נבחר באקראי. יהי X המספר הכתוב עליו.
הכדור מוחזר לתא ממנו הוא בא, ומתא זה נבחרים באקראי שני כדורים נוספים, עם החזרה. יהי Y ו Z המספרים הכתובים עליהם.

א. מצא את ההתפלגות המשותפת של X ו Y וההתפלגויות המותנות של Y בהינתן ערכי X.

ב. מצא את התפלגות התוחלת המותנית של X בהינתן Y.

ג. חשב את הסיכוי לכך ש Y ו Z יקבלו אותו ערך מספרי.

פתרון:

א.

$$P(X=1,\ Y=1)=0.1+0.1\cdot\frac{1}{2}+0.1\cdot\frac{1}{3}+0.1\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{120}$$

$$P(X=1,\ Y=2)=0.1\cdot\frac{1}{2}+0.1\cdot\frac{2}{3}+0.1\cdot\frac{3}{4}=\frac{23}{120}$$

$$P(X=2,\ Y=1)=0.1\cdot\frac{1}{2}+0.2\cdot\frac{1}{3}+0.3\cdot\frac{1}{4}=\frac{23}{120}$$

$$P(X=2,\ Y=2)=0.1\cdot\frac{1}{2}+0.2\cdot\frac{2}{3}+0.3\cdot\frac{3}{4}=\frac{49}{120}$$

$$P(Y=1|X=1)=\frac{25}{25+23}\qquad P(Y=2|X=1)=\frac{23}{25+23}$$

$$P(Y=1|X=2)=\frac{23}{23+49}\qquad P(Y=2|X=2)=\frac{49}{23+49}$$

ב.

$$E(X|Y=1)=\frac{25}{25+23}\cdot 1+\frac{23}{25+23}\cdot 2\qquad E(X|Y=2)=\frac{23}{23+49}\cdot 1+\frac{49}{23+49}\cdot 2$$

ג.

$$0.1+0.2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+0.3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+$$
$$+0.4\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)$$

שלומי

שאלה: (מבחינה של פרופ' מלכסון מ: 18/2/90)

יהי $X\sim P(\lambda)$. א. עבור t קבוע כלשהו, חשב $E(e^{tX})$.

ב. הוכח שלכל $N\ge 0$, $\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^N}{N!}\le P(X\ge N)\le\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^N}{\left(\frac{N}{e}\right)^N}$

(הדרכה: רשום $P(X\ge N)=P(e^{tX}\ge e^{tN})$ והפעל חלק א')

פתרון:

א.

$$E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot e^{tk}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}\cdot e^{tk}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^t\cdot\lambda)^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda\cdot e^t}=e^{-\lambda(1-e^t)}$$

ב. הצד השמאלי מתקבל מהטעון $P(X\ge N)\ge P(X=N)$. לגבי הצד הימני: e^{tX} היא פונקציה מונוטונית עולה ב X עבור כל t חיובי. היא גם חיובית.

עבור כל $t\ge 0$:

$$P(X\ge N)\overset{\text{אי שוויון מרקוב}}{\le}\frac{e^{-\lambda(1-e^t)}}{e^{tN}}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^t-Nt}$$

נבדוק עבור איזה t מתקבל חסם הדוק ביותר; נחפש את המינימום של $f(t)=\lambda e^t-Nt$. המינימום מתקבל בנקודה $t=\ln\left(\frac{N}{\lambda}\right)$ בה מתקבל חסם כנדרש.

שאלה: (מבחינה של פרופ' מלכסון מ: 18/2/90)

יהי X משתנה מקרי בעל ערכים טבעיים, תוחלת M ושונות σ^2 סופיים ותהי ההתפלגות המותנה של משתנה מקרי Y בהנתן $X=x$ (עבור x טבעי כלשהו) בינומית $B(x,p)$. א. חשב את $E(Y)$ ואת $V(Y)$ בעזרת M,σ,p.

ב. כיצד מתפלג Y כאשר $X\sim P(\lambda)$.

פתרון: א.

$$E(Y)=M\cdot p$$

$$V(Y)=E(V(Y/X))+V(E(Y/X))=M\cdot p\cdot(1-p)+\sigma^2\cdot p^2$$

ב.

$$P(Y=k)=\sum_{m=k}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\binom{m}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{m-k}=$$

$$=\frac{(p\lambda)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!}=\frac{(p\lambda)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{e^{-p\lambda}\cdot(p\lambda)^k}{k!}$$

$$\Longrightarrow Y\sim P(p\lambda)$$

שלומי

שאלה: (מבחינה של פרופ' מלכסון מ 18/2/90)

א. תן דוגמא להתפלגות של משתנה מקרי X עבורו $P\left(|X-E(X)|\ge 3\cdot\sigma(X)\right)$ היא בדיוק $\frac{1}{9}$

ב. תן דוגמא להתפלגות של משתנה מקרי עם תוחלת 4, חציון 3 וסטיית תקן 2.

ג. תן דוגמא להתפלגות של משתנה מקרי X ופונקציה f כך שמקדם המתאם בין X ו $f(X)$ הוא -0.6

פתרון:

א. $P(X=0)=\frac{8}{9}$, $P(X=3)=P(X=-3)=\frac{1}{18}$

ב. $X=Y+Z$, $Z\equiv 3$, $P(Y=k)=a$, $P(Y=0)=1-a$

$E(Y)=a\cdot k$, $\sigma^2=k^2\cdot a\cdot(1-a)$, $\begin{cases} a\cdot k=1 \\ a\cdot k^2\cdot(1-a)=4 \end{cases}$

ומתקבל $k=5$, $a=0.2$ ו $P(X=3)=0.8$, $P(X=8)=0.2$

ג. $P(X=1)=P(X=-1)=P(X=t)=P(X=-t)=\frac{1}{4}$

$$f(1)=-1 \quad f(-1)=1 \quad f(t)=t \quad f(-t)=-t$$

$$E(X)=E(f(X))=0 \quad V(X)=V(f(X))=0.5+0.5\cdot t^2$$

$$E(X\cdot f(X))=0.5\cdot 1\cdot(-1)+0.5\cdot t^2=0.5t^2-0.5$$

$$\frac{0.5\cdot t^2-0.5}{0.5\cdot t^2+0.5}=-0.6 \Longrightarrow t=0.5$$

שאלה: (מבחינה של פרופ' מלכסון מ 18/2/90)

יהיו $Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ בלתי תלויים, $0<V(Y)$, $V(Y_i)=1$ לכל $1\le i\le n$.

א. יהי $X_i=Y+Y_i$, $1\le i\le n$. הראה ש $\rho(X_i,X_j)$ אינו תלוי ב-i או ב-j אם רק $j\ne i$, ויכול לקבל ערך כלשהו בקטע הפתוח $(0,1)$.

ב. הראה שאם $V(Z_i)=1$ ו $\rho(Z_i,Z_j)$ אינו תלוי ב i או ב j בתחום $1\le i<j\le n$, אך ערכו שלילי, n לא יכול להיות גדול כרצוננו. חסום אותו כפונקציה של מקדם המתאם.

פתרון:

א. $$\rho(X_i,X_j)=\frac{cov(Y+Y_i,Y+Y_j)}{\sqrt{V(Y+Y_i)\cdot V(Y+Y_j)}}=\frac{V(Y)}{V(Y)+1}$$

עבור מקדם מתאם r: $r\cdot(V(Y)+1)=V(Y) \Longrightarrow V(Y)=\frac{r}{1-r}$

ב. $$\rho(Z_i,Z_j)=\frac{cov(Z_i,Z_j)}{\sqrt{1\cdot 1}}=cov(Z_1,Z_2)$$

$$0\le V\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)=n\cdot V(Z_1)+n\cdot(n-1)\cdot cov(Z_1,Z_2) \Longrightarrow$$

$$n\cdot 1+n(n-1)\cdot\rho(Z_1,Z_2)\ge 0 \Longrightarrow \rho(Z_1,Z_2)\ge -\frac{1}{n-1} \Longrightarrow n\le 1-\frac{1}{\rho(Z_1,Z_2)}$$

שלומי